Лекция 17-18. Вложенные подмногообразия и нормальные формы

1 Почленное интегрирование

Теорема 1 *Пусть последовательность непрерывных функций равномерно сходится на отрезке, и пусть последовательность их первообразных сходится в одной точке. Тогда последовательность этих первообразных равномерно сходится на том же отрезке.*

2 Почленное дифференцирование

Теорема 2 *(Вейерштрасс) Пусть последовательность непрерывных производных дифференцируемых функций равномерно сходится на отрезке, и пусть последовательность самих функций сходится в одной точке. Тогда последовательность функций сходится равномерно, и производная предела равна пределу производных.*

Теорема 3 *Пусть последовательность функций и всех их непрерывных частных производных до порядка N сходится равномерно на открытой области пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда производные пределов до порядка N равны пределам соответствующих производных.*

Теорема 2 немедленно следует из теоремы 1. Теорема 3 выводится из теоремы 2 индукцией по N.

3 Пространство C^k

Определение 1 *Пространство $C^k_{[a,b]}$–это пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ с метрикой*

$$\rho(f,g) = \sum_1^k \max_{[a,b]} |f^{(j)} - g^{(j)}|.$$

Определение 2 *Пространство C^N_Ω–это пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на области Ω, с метрикой*

$$\rho(f,g) = \sum_{|k|=1}^N \max_\Omega |D^k f - D^k g|.$$

Теорема 4 *Для любых N и Ω, пространство C^N_Ω полно.*

Материал последних трех разделов разбирался на упражнениях.

4 Теорема о неявной, многомерный случай.

Теорема 5 *Пусть f–C^1-гладкое отображение области пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, $m \leq n$. Тогда в окрестности каждой точки a, в которой*

$$rk\ df(a) = m,$$

множество

$$M_a = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = f(a)\}$$

локально задается в виде графика C^1-гладкого отображения некоторого координатного пространства $\mathbb{R}^{n-m}$ в дополнительное пространство $\mathbb{R}^m$.

Доказательство Рассмотрим ненулевой минор якобиевой матрицы $df(a)$. Перенумеруем переменные

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x, y) = (x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_m)$$

так, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0.$$

Рассмотрим отображение

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = (x, f(x, y)).$$

Дальнейшие рассуждения–как в доказательстве теоремы о неявной для функции двух переменных. □

5 Старшие производные.

Теорема 6 *Если в условиях предыдущей теоремы $f \in C^N$, то и $\varphi \in C^N$.*

Доказательство Это следует из теоремы о C^N-гладкости обратного отображения. □

6 Одномерные подмногообразия.

Определение 3 *Одномерным C^N-подмногообразием координатной плоскости называется множество, которое в окрестности каждой точки задается как график C^N-отображения одной из координатных осей (выбор которой может зависеть от точки) в другую.*

Следствие 1 *теоремы 6 Некритическое (т.е. не содержащее критических точек) множество уровня C^N-гладкой функции на плоскости является одномерным C^N-подмногообразием.*

7 Вложенные подмногообразия.

Определение 4 *m-мерным C^N-подмногообразием координатного пространства $\mathbb{R}^N$ называется множество, которое в окрестности каждой своей точки задается как график C^N-отображения зависящей от точки координатной плоскости $\mathbb{R}^{n-m}$ в дополнительную координатную плоскость $\mathbb{R}^m$.*

Определение 5 *Критической точкой отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ m \leq n$, называется точка, в которой $\mathrm{rank}\ df < m$. Множество уровня отображения f назавется некритическим, если оно не содержит критических точек, и критическим в противном случае.*

Следствие 2 *теоремы 6 Некритическое множество уровня C^N-отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (то есть множество уровня, во всех точках которого ранг отображения равен m), является m-мерным C^N-подмногообразием $\mathbb{R}^n$.*