Лекция 18-18. Нормальные формы и условный экстремум (необходимость)

1 Еще о дифференцировании композиций

Рассмотрим композицию отображений: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $g : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \oplus \mathbb{R}^m,\ x \mapsto (x, \varphi(x))$. Тогда

$$d(f \circ g)(x) = (D_x f \circ g + D_y f \circ g \cdot d\varphi)(x, \varphi(x))$$

2 Теорема о неявной, многомерный случай.

Повторение; комментарий.

Теорема 1 *Пусть f -отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, $(x_1, ..., x_{n-m}, y_1, ..., y_m) = (x, y)$ - координаты в $\mathbb{R}^n$, и $\det D_y f \neq 0$. Тогда множество нулей отображения f можно записать в виде $y = \varphi(x)$, причем*

$$d\varphi(x) = ((D_y f)^{-1} D_x f)(x, \varphi(x)). \tag{1}$$

3 Нормальные формы функций вблизи некритических точек.

Нет функций, кроме линейных, в окрестности некритических точек.

Теорема 2 *C^N-отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в проектирование на координатную ось: $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1$.*

Следствие 1 *Поверхность уровня C^N-функции $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в гиперплоскость $x_1 = 0$.*

4 Нормальные формы отображений вблизи некритических точек.

Теорема 3 *C^N-отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в проектирование на координатную плоскость: $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_m)$.*

Следствие 2 *Поверхность уровня C^N-отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в плоскость $x_1 = ... = x_m = 0$.*

5 Условный экстремум функции на гиперповерхности (необходимое условие)

Рассмотрим C^1-функцию f и гладкую поверхность Γ в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1 *Условным экстремумом функции f на Γ называется локальный экстремум ограничения $f|_\Gamma$.*

Замечание 1 *Условный экстремум функции f на Γ может приниматься в некритической точке функции. Пример: функция x на единичной окружности принимает максимум в точке $(1, 0)$.*

Рассмотрим сначала простейший случай.

Теорема 4 *[необходимое условие локального экстремума на гиперповерхности] Пусть a – некритическая точка для C^1-функций f и g, и пусть a – экстремум для ограничения f на поверхность уровня функции g, проходящую через a. Тогда дифференциалы функций f и g в точке a линейно зависимы: существует такое λ что*

$$df_a + \lambda dg_a = 0.$$

Коэффициент λ в этом равенстве называется *множителем Лагранжа.*
Доказательство Воспользуемся теорией нормальных форм. Эта теория позволяет исследовать инвариантно заданные объекты в наиболее удобной системе координат.

Выберем наши координаты так, чтобы функция g превратилась в первую координату x_1 . Это возможно по теореме 2. Тогда дифференциал функции g примет вид $dg = dx_1$.

С другой стороны, в точке условного экстремума (пусть это будет начало координат) дифференциал функции $f(0, x_2, ..., x_n) = h(x_2, ..., x_n)$ обращается в 0. Следовательно

$$df(0) = D_1 f(0)dx_1 + D_2 f(0)dx_2 + ... + D_n f(0)dx_n = D_1 f(0)dx_1 + dh(0) = D_1 f(0)dx_1.$$

Следовательно, дифференциалы функций f и g в точке 0 пропорциональны. Это доказывает теорему. $\square$

Замечание 2 *Множитель Лагранжа в точке 0 равен $D_1 f(0)$. Отметим, что эта производная вычисляется в нормализущих, а не в исходных координатах.*