Скобки Пуассона

① Общий вид скобки Пуассона на алгебре дифференцируемых функций на многообразии M следующий:

$$\{f, h\} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z^i} \omega^{ij}(z) \frac{\partial h}{\partial z^j}$$

где $\{z^i\}_{1 \le i \le n}$ — (локальные) координаты на M, $f(z)$ и $h(z)$ — дифференцируемые функции на M.

Какие условия на компоненты Пуассонова тензора $\omega^{ij}(z)$ накладывает антисимметричность скобки $\{f,h\} = -\{h,f\}$ и тождество Якоби?

② Пусть матрица Пуассонова тензора $\omega = \|\omega^{ij}(z)\|_1^n$ не вырождена в некоторой области V многообразия M. Обозначим $\omega_{ij}(z)$ матричные элементы ω^{-1}:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(z)\, \omega^{kj}(z) = \delta_i^j.$$

Докажите, что 2-форма

$$\Omega = \sum_{i,j} \omega_{ij}(z)\, dz^i \wedge dz^j$$

замкнута в рассматриваемой области $V \subset M$.

③ Обозначим t^i_j — матричные функции на пространстве матриц $Mat_n(\mathbb{C})$.
На алгебре полиномиальных функций $\mathbb{C}[t^i_j]$ можно задать $gl(n)$ скобку Пуассона (скобку Пуассона-Ли):

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12}T_1 - T_1P_{12}$$

$T = \|t^i_j\|$, P_{12} — матрица перестановки:

$$P_{12} \in Mat_{n^2}(\mathbb{C}) : (P_{12})^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}$$

Докажите, что полиномы

$$p_k(T) = Tr(T^k) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_k = 1}^{n} t^{i_1}_{i_2} t^{i_2}_{i_3} \dots t^{i_{k-1}}_{i_k} t^{i_k}_{i_1}$$

принадлежат Пуассонову центру алгебры ф-ций, то есть, $\{p_k(T), t^i_j\}_{PL} = 0 \quad \forall k, \ \forall t^i_j$

④ Рассмотрим на алгебре $\mathbb{C}[t^i_j]$ (см. задачу ③) другую скобку Пуассона — скобку Склянина:

$$\{T_1, T_2\}_{SKL} = T_1T_2 r_{12} - r_{12}T_1T_2, \quad r_{12} \in Mat_{n^2}(\mathbb{C})$$

Докажите, что тождество Якоби для скобки Склянина выполняется, если r_{12} удовлетворяет классическому урав. Янга-Бакстера:

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

5. Рассмотрим классическую r-матрицу $GL(N)$ типа:

$$r_{12} = \sum_{i=1}^{N} E^i{}_i \otimes E^i{}_i + 2 \sum_{i>j=1}^{N} E^i{}_j \otimes E^j{}_i$$

$E^i{}_j \in Mat_N(\mathbb{C})$ — матричные единицы.

а) Докажите, что r_{12} удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера

б). Докажите, что $Tr(T) = \sum_{i=1}^{N} t^i{}_i$ не является элементом Пуассонова центра:

$$\{Tr(T), t^i{}_j\}_{SKL} \neq 0$$

в)* Пользуясь соотношениями:

$$\det(T) = \frac{1}{N!} \sum_{\{i\}\{j\}} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} T^{i_1}{}_{j_1} \dots T^{i_N}{}_{j_N} \varepsilon^{j_1 \dots j_N}$$

$$\sum_{\{i\}} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} T^{i_1}{}_{j_1} \dots T^{i_N}{}_{j_N} = \det(T)\, \varepsilon_{j_1 \dots j_N}$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_{N-1}=1}^{N} \varepsilon_{i_1 \dots i_{N-1} a} \varepsilon^{i_1 \dots i_{N-1} b} = (N-1)!\, \delta_a^b$$

($\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ — полностью антисимметрический тензор N-го ранга)

докажите, что $\det(T)$ лежит в Пуассоновом центре скобки Склянина с r-матрицей $GL(N)$ типа:

$$\{\det(T), t^i{}_j\}_{SKL} = 0 \quad \forall\, t^i{}_j.$$

6.) Рассмотрим на алгебре функций $\mathbb{C}[t^i_j]$ на матрицах $Mat_n(\mathbb{C})$ скобку Пуассона, предложенную Семёновым-Тянь-Шанским:

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21} T_1 T_2 - T_2 T_1 r_{12} + T_2 r_{12} T_1 - T_1 r_{21} T_2$$

а) Для $GL(2)$ r-матрицы $r_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

напишите явный вид скобки Семёнова-Тянь-Шанского между матричными элементами $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $\{a, b\} = ?$ ....

б) Докажите прямым вычислением, что полиномы $Tr(T) = a + d$ и

$Tr(T^2) = a^2 + d^2 + 2bc$

принадлежат Пуассонову центру скобки Семёнова-Тянь-Шанского:

$$\{Tr(T), t^i_j\}_{STS} = \{Tr(T^2), t^i_j\}_{STS} = 0$$

для $\forall\, t^i_j \in \{a, b, c, d\}$.