Семинар 14.
Геометрия унитарных пространств

Во всех задачах V - конечномерное комплексное векторное пространство, снабженное эрмитовым скалярным произведением $(,)$ (унитарное пространство).

Задача 1. Пусть $e_1, ..., e_n$ - ортонормированный базис пространства V. Докажите, что $w = (w, e_1)e_1 + (w, e_2)e_2 + ...(w, e_n)e_n$ для любого вектора $w \in V$.

Задача 2. Докажите, что линейный оператор $A : V \to V$, матрица которого является унитарной в некотором ортонормированном базисе пространства V, является унитарным.

Линейный оператор B в пространстве V называется *сопряженным* к линейному оператору A, если $(Ax, y) = (x, By)$. (Обозначение: $B = A^*$.) Оператор A называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если $A = A^*$. Оператор A называется *антисамосопряженным* (или *антиэрмитовым*), если $A = -A^*$. Имеет место следующая теорема, которая будет доказана на лекции: если оператор A самосопряжен, либо антисамосопряжен, либо унитарен, то он диагонализируется в некотором ортонормированном базисе в V.

Задача 3. а) Докажите, что для любого оператора A в V сопряженный к нему оператор A^* существует и единственен.
б) Докажите, что матрица F (анти)самосопряженного оператора A в произвольном ортонормированном базисе является *(анти)эрмитовой*, то есть $F = F^*$ (соответственно, $F = -F^*$).
в) Как связаны собственные значения операторов A и A^*?

Задача 4. Линейный оператор A в V называтся *положительным*, если $(Ax, x) > 0$ для любого ненулевого вектора $x \in V$. Пусть A - положительный самосопряженный оператор в V.
а) Докажите, что A невырожден.
б) Докажите, что из A извлекается положительный квадратный корень, то есть существует положительный самосопряженный оператор B в V такой, что $A = B^2$.

Задача 5. Пусть A - невырожденный оператор в V. Докажите, что AA^* - положительный самосопряженный оператор.

Дополнительные задачи к семинару 14

Задача 1. а) Докажите, что для любых двух наборов комплексных чисел $(x_1, ..., x_n)$ и $(y_1, ..., y_n)$ имеет место неравенство:

$$(|\sum x_i \overline{y}_i|)^2 \leqslant (\sum |x_i|^2)(\sum |y_i|^2).$$

б) Выразите эрмитово скалярное произведение (v, w) двух произвольных векторов $v, w \in V$ через нормы подходящих линейных комбинаций этих векторов. (Это эрмитов аналог выражения билинейной формы через ассоциированную с ней квадратичную форму.)

Задача 2. Докажите, что для всякого унитарной матрицы U существует такая эрмитова матрица A, что $U = \exp(iA)$.

Задача 3. Две матрицы A и B называются *унитарно эквивалентными*, если существует такая унитарная матрица U, что $B = U^{-1}AU$. Всякая ли матрица унитарно эквивалентна своей жордановой нормальной форме?