Материалы к семинарам по матанализу (второй семестр)

11-я и 12-я недели (02.04–13.04.2018)

Лекции 16–18

1. Теоремы о неявной и обратной функции
2. Подмногообразия в $\mathbb{R}^n$.

Примерные задачи семинаров 16–18

Метрические пространства $C^k[a,b]$

Задача 6.1. Докажите, что следующие отображения непрерывны:
(а) определённое интегрирование $C[a,b] \to \mathbb{R}$, переводящее f в $\int_a^b f(x)dx$;
(б) неопределённое интегрирование $C[a,b] \to C_[a,b]$, переводящее f в $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

Задача 6.2. (а) Пусть последовательность f_n сходится к f, причём последовательность f_n' её производных равномерно сходится. Докажите, что предел f_n' равен f'.
(б) Достаточно ли потребовать сходимость исходной последовательности f_n в одной точке? Достаточно ли поточечной сходимости f'?

Указание. воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.3. Рассмотрим пространство n-гладких функций на отрезке $[a,b]$ (все производные, включая n-ю, определены и непрерывны).
(а) Какие из следующих выражений определяют метрику на этом пространстве:

$$d_1(f,g) = \max_{0\le k\le n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)} - g^{(k)}|, \quad d_2(f,g) = \min_{0\le k\le n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)} - g^{(k)}|, \quad d_3(f,g) = \sum_{k=1}^{n} \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)} - g^{(k)}|.$$

(б) Докажите эквивалентность соответствующих метрик.

Пространство n-гладких функций с метрикой d_3 обозначается $C^n[a,b]$.

Задача 6.4. Докажите полноту: (а) $C^1[a,b]$; (б) $C^n[a,b]$.

Задача 6.5.* Найдите пополнение (замыкание) следующих множеств:
(а) множества липшицевых функций в $C[a,b]$;
(б) $C^k[a,b]$ в $C^n[a,b]$, $n < k$;
(в) множества функций с $|f'| < 1$ в $C[a,b]$.

Задача 6.6. Непрерывны ли отображения:
(а) естественного вложения $C^k[a,b]$ в $C^n[a,b]$, $n < k$;
(б) дифференцирования $C^k[a,b]$ в $C^{k-1}[a,b]$;
(в) неопределённого интегрирования $C^k[a,b]$ в $C^{k+1}[a,b]$.

Кривые на плоскости

Задача 6.7. Определите, для каких промежутков теорема о неявной функции позволяет дать решение $y = y(x)$ уравнения $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*астроида*). Найдите для этих решений dy/dx, d^2y/dx^2. (Ответ может содержать и x, и y.)

Задача 6.8. Решите ту же задачу для *лемнискаты Бернулли*: $(x^2 + y^2)^2 - 2a(x^2 - y^2) = 0$.

Задача 6.9.* Докажите, что в окрестности точки $(0,0)$ лемниската Бернулли представляется как объединение двух гладких кривых.

Задача 6.10. Рассмотрим параметрически заданную кривую
(а) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, (б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, (в) $x = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
Найдите, при каких t_0 в окрестности точки $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ применима теорема о неявной функции. Разложите в ряд Тейлора до $o((x-x_0)^2)$ соответствующую функцию $y = y(x)$.

Задача 6.11* Докажите, что если $y = y(x)$ — локальное задание кривой второго порядка на плоскости, то выполнено уравнение $d^3/dx^3\big((y'')^{-2/3}\big) = 0$.

Многомерная теорема о неявной функции

Задача 6.12. Для функции $z = z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядка, если
(а) $z^3 - 3xyz = a^3$, (б) $x + y + z = e^z$.

Задача 6.13. Поверхность M задана уравнением $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$.
(а) Проверьте, что в окрестности точки $(1, 1, 1)$ теорема о неявной функции позволяет локально выразить любую переменную через две другие.
(б) Для функции $\varphi(x, y, z) = xy^2z^3$ на этой поверхности найдите $\partial\varphi/\partial x$ в точке $(1, 1, 1)$, если считать независимыми переменными x и y, а $z = z(x, y)$ выразить из уравнения $F(x, y, z) = 0$.
(в) Тот же вопрос для независимых переменных x и z.
(г) Выразите $d\varphi$ на M через dx и dy, а также через dx и dz.

Задача 6.14. Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
(а) Найдите матрицу частных производных $\partial(x, y)/\partial(r, \varphi)$. Проверьте, что при $r \neq 0$ теорема о неявной функции позволяет локально выразить x, y через r, φ.
(б) Найдите частные производные $\partial(r, \varphi)/\partial(x, y)$. (в) Определим *лапласиан* функции на плоскости как $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$. Выразите его в полярных координатах.

Задача 6.15. (а) Пусть кривая $(x(t), y(t))$ такова, что локально $dx/dt \neq 0$. Для явного задания $y = y(x)$ этой кривой определим *кривизну* $k = \dfrac{|y''_{xx}|}{(1 + (y'_x)^2)^{3/2}}$. Выразите кривизну через производные x и y по t.
(б) Пусть кривая задана в полярных координатах: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Выразите её кривизну через производные r и φ по t.
(в) Докажите, что кривизна плоской кривой не меняется при изменении её параметризации и при движениях кривой.

Задача 6.16. В окрестности каких точек обратимы следующие отображения? Вычислите дифференциал обратного отображения.
(а) $F(x, y) = (x + y, xy)$; (б) $F(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$; (в) $F(x, y) = (xy, x^y)$, $x > 0$.