Лекция 19-18. Условный экстремум: достаточность

1 Условный экстремум функции на поверхности произвольной размерности (необходимое условие)

Названный в заглавии условный экстремум исследуется так же, как в случае гиперповерхностей, с минимальными изменениями.

Теорема 1 *[необходимое условие локального экстремума на поверхности, общий случай] Пусть a – некритическая точка для C^1-функции f и C^1-отображения $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, и пусть a – экстремум для ограничения f на поверхность уровня отображения g, проходящую через a. Пусть отображение g задано функциями $g_1, ..., g_m$. Тогда дифференциалы функций f и $g_1, ..., g_m$ в точке a линейно зависимы: существуют такие λ_j что*

$$df_a + \sum \lambda_j dg_j(a) = 0.$$

Коэффициенты λ_j в этом равенстве называются *множителями Лагранжа.*
Доказательство Воспользуемся снова теорией нормальных форм.

Выберем наши координаты так, чтобы функции g превратилась в первые m координат: $g_1 = x_1, ..., g_m = x_m$. Это возможно по теореме **??**. Тогда дифференциал функции g_j примет вид $dg_j = dx_j$.

С другой стороны, в точке условного экстремума (пусть это будет начало координат) дифференциал функции $f(0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_n) = h(x_{m+1}, ..., x_n)$ обращается в 0. Следовательно

$$df(0) = D_1f(0)dx_1 + ...D_mf(0)dx_m + D_{m+1}f(0)dx_{m+1} + ... + D_nf(0)dx_n =$$

$$D_1f(0)dx_1 + ...D_mf(0)dx_m + dh(0) = D_1f(0)dx_1 + ...D_mf(0)dx_m.$$

Следовательно, дифференциалы функций f и g_j в точке 0 линейно зависимы. Это доказывает теорему. □

Замечание 1 *Множители Лагранжа в точке 0 равны $\lambda_j = D_jf(0)$. Отметим, что эти производные вычисляются, как и выше, в нормализущих, а не в исходных координатах.*

2 Как находить условный экстремум

Критические точки ограничения $f|_\Gamma$ ищут обычно с помощью **множителей Лагранжа**. Заметим, что если линейная комбинация дифференциалов $df, dg_1, \ldots, dg_m$ обращается в ноль в точке a из Γ, то df входит в эту комбинацию с ненулевым коэффициентом. Это следует из того, что Γ–некритическое множество уровня отображения $g : \Gamma = g^{-1}(b),\ b \in \mathbb{R}^m$.

Поставим следующие две задачи:

1. Для данного набора коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ найти все точки, в которых

$$dF_\lambda := df + \lambda_1 dg_1 + \cdots + \lambda_m dg_m = 0. \tag{1}$$

Получится множество точек

$$x = \varphi(\lambda),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

2. Найти все значения λ, для которых точки $x(\lambda)$ принадлежат Γ.

Коэффициенты λ_j в левой части (1) называются **множителями Лагранжа**. При каждом фиксированном наборе λ система (1) представляет собой набор из n уравнений (равенство нулю коэффициентов при $dx_1, \ldots, dx_n$) с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$. Если гессиан функции F_0 в критической точке невырожден, эта система задает гладкую m-мерную поверхность вида $x = \varphi(\lambda)$. Доказательство этого утверждения входит в следующий листок. Это решает первую задачу.

Чтобы решить вторую задачу, нужно найти точку вида $x = \varphi(\lambda)$, принадлежащую Γ. Для этого нужно решить систему

$$g \circ \varphi(\lambda) = b.$$

В этой системе m уравнений для m компонент отображения g, и m неизвестных: $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. В общем случае, решения такой системы–изолированные точки.

3 Касательные плоскости к вложенным подмногообразиям.

Определение 1 *Касательное пространство к поверхности уровня функции в некритической точке – это ядро ее дифференциала в этой точке.*

Теорема 2 *Градиент функции в некритической точке ортогонален ее поверхности уровня, проходящей через эту точку.*

Пример 1 *Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

Определение 2 *Касательное пространство к поверхности уровня гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в его некритической точке – это ядро дифференциала отображения в этой точке.*

Теорема 3 *Пусть 0 - некритическая точка гладкого отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Выберем координаты $(x_1, ..., x_{n-m}, y_1, ..., y_m) = (x, y)$ так, чтобы касательная плоскость к поверхности в точке 0 совпадала с координатной плоскостью $y = 0$. Тогда поверхность $f = f(0)$ задается уравнением $y = \varphi(x)$, причем $d\varphi(0) = 0$.*

Это следует из формулы (1) лекции 18.

4 Достаточные условия наличия условного экстремума

Пример 2 *Положительно определенная квадратичная форма $2x^2+y^2$ имеет на единичной окружности два локальных минимума и два локальных максимума.*

Вывод: ограничение положительно определенной квадратичной формы на подмногообразие может иметь локальный максимум.

Теорема 4 *Пусть гиперповерхность Γ задана уравнением $g = 0$ и точка a – некритическая для g. Пусть точка a – критическая для ограничения $f|_\Gamma$, но не для самой функции f . Пусть λ – соответствующий множитель Лагранжа:*

$$df_a + \lambda dg_a = 0.$$

Пусть гессиан функции $f+\lambda g$ в точке a – положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма. Тогда a – локальный минимум (максимум) для ограничения $f|_\Gamma$.

Мы называем эту теорему безусловным достаточным условием условного экстремума.

Теорема 5 *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, кроме последнего. Пусть ограничение гессиана функции $f + \lambda g$ в точке a на касательную плоскость $T_a\Gamma$ – положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма. Тогда a – локальный минимум (максимум) для ограничения $f|_\Gamma$.*

Мы называем ее условным достаточным условием условного экстремума.

Теорема 4 следует из теоремы 5, но она легче, и потому доказана отдельно.

В условиях теоремы 5 сигнатура гессиана может быть либо $\pm n$, либо $\pm(n-2)$.