

Логика и алгоритмы весна 2018.

Задачи для семинара N 1.

исчисление высказываний

Шпаргалка (аксиомы и правило вывода):

$$A_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A);$$

$$A_2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$A_3 : A \wedge B \rightarrow A;$$

$$A_4 : A \wedge B \rightarrow B;$$

$$A_5 : A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B));$$

$$A_6 : A \rightarrow (A \vee B);$$

$$A_7 : B \rightarrow (A \vee B);$$

$$A_8 : (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C));$$

$$A_9 : (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A);$$

$$A_{10} : \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A_{11} : A \vee \neg A.$$

$$\text{Modus Ponens} : \frac{A, A \rightarrow B}{B}.$$

Теорема о дедукции: $\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \rightarrow B$.

1. Докажите что:

- (a) если $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \wedge B$;
- (b) если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, B \vdash C$, то $\Gamma, A \vee B \vdash C$ (правило разбора случаев);
- (c) если $\Gamma, A \vdash C$ и $\Gamma, \neg A \vdash C$, то $\Gamma \vdash C$,
- (d) если $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \neg B$, то $\Gamma \vdash \neg A$ (рассуждение от противного).

2. Докажите выводимость следующих формул:

- (a) $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$;
- (b) $A \vee B \rightarrow B \vee A$;
- (c) $A \wedge (B \wedge C) \rightarrow (A \wedge B) \wedge C$;
- (d) $A \vee (B \vee C) \rightarrow (A \vee B) \vee C$;
- (e) $(A \vee B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$;
- (f) $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge C$;
- (g) $(A \vee B) \wedge C \rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;
- (h) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee C$;
- (i) $(A \wedge B) \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

3. Докажите выводимость следующих формул:

- (a) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$; (e) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.
 (b) $A \rightarrow \neg\neg A$; (f) $A \vee B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$;
 (c) $\neg\neg A \rightarrow A$;
 (d) $A \wedge \neg A \rightarrow B$; (g) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow A \vee B$.

4. Докажите выводимость формул, соответствующих законам де Моргана.

- (a) $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$; (c) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$;
 (b) $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$; (d) $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$.

5. Докажите, что если заменить аксиому A_{11} на $\neg\neg A \rightarrow A$, то множество выводимых формул не изменится.

Множество формул Γ называется *непротиворечивым*, если нет такой формулы A , при которой одновременно верно $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$. Максимальное по включению непротиворечивое множество формул называется *максимальным непротиворечивым*.

Множество формул Γ называется *полным*, если для любой формулы A из гипотез Γ выводима ровно одна из формул $A, \neg A$.

6. Пусть дана функция $f : PV \rightarrow \{0, 1\}$ — оценка пропозициональных переменных. Докажите, что множество формул $\Gamma_f = \{A \mid f(A) = 1\}$ максимально непротиворечиво.
7. Докажите, что Γ полно тогда и только тогда, когда множество всех формул, выводимых из Γ , максимально непротиворечиво.
8. В этой задаче будем считать, что формулы содержат только три переменные p, q и r . Для следующих множеств формул определите, являются ли они непротиворечивыми и являются ли они полными.

- (a) $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p\}$, (c) $\{p \wedge q \wedge r\}$, (e) $\{p \wedge q \rightarrow q \vee r, r, \neg(p \vee q)\}$,
 (b) $\emptyset$, (d) $\{p \vee q \rightarrow r, \neg r, p \vee q\}$, (f) $\{\neg(p \rightarrow \neg q), \neg p\}$.

Логика предикатов.

9. Пусть A — произвольное множество. Рассмотрим модель $(P(A), =, \cap, \cup)$, где « $=$ » — предикат равенства, $\cap$ и $\cup$ — соответственно, пересечение и объединение множеств. Запишите формулу, говорящую, что

- (a) $x \subseteq y$;
 (b) x — одноэлементное множество;
 (c) x — двухэлементное множество.

10. Для каждой из следующих формул определите, являются ли они выполнимыми или опровержимыми:

(a) $\exists x \forall y (Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$;

(b) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$;

(c) $\forall x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$;

(d) $\exists y \forall x (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$;

(e) $\forall x \neg \forall y \neg P(x, y) \wedge \neg \exists z \forall y P(y, z)$;

(f) $\forall x (\neg P(x, x) \wedge \exists z P(z, x) \wedge \forall y \exists z (P(x, z) \wedge P(z, y) \vee \neg P(x, y)))$.

11. общезначимы ли следующие формулы?

(a) $\exists x \forall y Q(x, y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$;

(b) $\forall y \exists x Q(x, y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$;

(c) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \neg (\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))$.