Семинар 15.
Овеществление комплексного векторного пространства. Кэлеровы тройки

Задача 1. Пусть V - конечномерное комплексное векторное пространство и $V_{\mathbb{R}}$ - его овеществление, то есть то же самое пространство V, понимаемое как векторное пространство над $\mathbb{R}$. Для произвольного базиса $(e_1, ..., e_n)$ в V докажите, что $(e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n)$ - базис над $\mathbb{R}$ пространства $V_{\mathbb{R}}$.

Задача 2. Рассмотрим в комплексном пространстве V линейный оператор $A: \ V \to V$.
а) Проверьте, что его *определитель* $\det A$, вычисляемый как определитель его матрицы в некотором базисе, определен корректно, то есть не зависит от базиса. (Он обозначается $\det A$.)
б) Пусть $A_{\mathbb{R}}: \ V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ - тот же оператор A, рассматриваемый как (линейный над $\mathbb{R}$) оператор в пространстве $V_{\mathbb{R}}$. Его определитель $\det A_{\mathbb{R}}$ также корректно определен. Докажите, что $\det A_{\mathbb{R}} = |\det A|^2$.

Задача 3. а) Рассмотрим в пространстве V оператор $i: \ V \to V, \ v \mapsto iv, \ v \in V$, умножения на комплексное число i. Обозначим через I его овеществление: $I = i_{\mathbb{R}}$. Так как $i^2 = -1$, то $I^2 = -\mathrm{id}_{V_{\mathbb{R}}}$. Найдите матрицу оператора I в базисе $(e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n)$ пространства $V_{\mathbb{R}}$.
б) Оператор I на вещественном пространстве W со свойством $I^2 = -\mathrm{id}_W$. С помощью оператора I определим на W умножение на комплексные числа по правилу: для произвольного комплексного числа $z = a + ib$ и произвольного вектора $w \in W$ полагаем $zw = aw + bI(w)$. Докажите, что это умножение задает на W структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$. (По этой причине оператор I называется *оператором комплексной структуры на* W.) Является ли оператор I невырожденным?
в) Проверьте, что если $W = V_{\mathbb{R}}$ и $I = i_{\mathbb{R}}$, то введенная с помощью I комплексная структура на $V_{\mathbb{R}}$ совпадает с исходной комплексной структурой на V.

Задача 4. Пусть V - унитарное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\ , \ )$. Для произвольных векторов $v, w \in V$ обозначим $g(v, w) = \mathrm{Re}(v, w), \ \omega(v, w) = \mathrm{Im}(v, w)$. Рассмотрим также пространство $W = V_{\mathbb{R}}$ и на нем оператор комплексной структуры $I = i_{\mathbb{R}}$.
а) Докажите, что $g(v, w)$ - симметрическая билинейная форма на вещественном пространстве W, задающая на нем евклидову структуру (то есть $g(v, w)$ удовлетворяет свойствам евклидова скалярного произведения на W).
б) Докажите, что $\omega(v, w)$ - кососимметрическая билинейная форма на пространстве W.
в) Докажите равенство $g(v, Iw) = \omega(v, w)$ для любых $v, w \in W$.

Задача 5. Тройка структур (g, I, ω) на вещественном векторном пространстве W, удовлетворяющая соотношению $g(v, Iw) = \omega(v, w)$, где g - евклидова структура на W, I - оператор комплексной структуры на W, а ω - кососимметрическая билинейная форма, называется *кэлеровой тройкой.*
а) Для данной кэлеровой тройки (g, I, ω) на W и данного базиса (e) в W пусть $\mathbf{G}$ и $\mathbf{\Omega}$ - матрицы Грама билинейных форм g и ω в базисе (e), а $\mathbf{I}$ - матрица оператора I в этом же базисе. Найдите соотношение между матрицами $\mathbf{G}$, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{\Omega}$, и выведите отсюда невырожденность формы ω. (По причине невырожденности кососимметрическая форма ω называется *симплектической формой* (или *симплектической структурой*) на W.)
б) Согласно задаче 4 эрмитова структура $(\ , \ )$ на комплексном пространстве V определяет кэлерову тройку на его овеществлении $V_{\mathbb{R}}$. Как по этой кэлеровой тройке восстановить унитарную структуру на $V_{\mathbb{R}}$, то есть комплексную структуру и эрмитово скалярное произведение на этом пространстве?

Дополнительные задачи к семинару 15

Задача 1. В пространстве $\mathbb{C}^n$ рассмотрим стандартный базис $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$. Рассмотрим стандартное эрмитово скалярное произведение (z, w) на $\mathbb{C}^n$, заданное в этом базисе формулой $(z, w) = z_1\overline{w}_1 + ... + z_n\overline{w}_n$. Рассмотрим соответствующую кэлерову тройку (g, I, ω) на овеществлении $\mathbb{R}^{2n}$ пространства $\mathbb{C}^n$. Найдите соответствующие матрицы $\mathbf{G}$, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{\Omega}$ в базисе $(e_1, ..., e_n, ie_1, ..., ie_n)$ пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

Задача 2. Докажите, что для кэлеровой тройки (g, I, ω) на W и любых векторов $v, w \in W$ верны равенства $g(Iv, Iw) = g(v, w)$, $\omega(Iv, Iw) = \omega(v, w)$.

Задача 3. а) Докажите, что в кэлерой тройке (g, I, ω) каждая из двух структур однозначно определяет третью.
б) Как определить оператор I по паре (g, ω) из кэлеровой тройки, не пользуясь матрицами $\mathbf{G}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{\Omega}$?