

Механика

Домашнее задание

срок сдачи 15.05.2018

1. Потенциал Морса

$$U(x) = e^{-\alpha x} - \alpha e^{-x}, \quad \alpha > 1,$$

используется в физике для качественного описания колебаний атомов в двухатомной молекуле. Здесь x измеряет отклонение атомов в молекуле от положения равновесия.

- Найдите положение равновесия этого потенциала и определите частоту малых колебаний атомов единичной массы $m = 1$ в окрестности точки равновесия.
- Нарисуйте фазовый портрет одномерной механической системы с таким потенциалом.

2. Закон сохранения энергии для материальной точки на \mathbb{R}^1 , помещенной в поле потенциала $U(x)$: $E = m\dot{x}^2/2 + U(x)$, можно преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Решая это уравнение, докажите, что время движения материальной точки по сепаратрисе до положения неустойчивого равновесия равно ∞ .

3* (Задача из книги В.И. Арнольда "Мат. методы классической механики" §4).

Пусть $S(E)$ — площадь фигуры, ограниченной замкнутой фазовой кривой, соответствующей уровню энергии E . Докажите, что период обращения по этой кривой равен $T = dS/dE$.

4. На тренировке атлет пробегает круг радиуса R с постоянной по величине скоростью v . В момент старта навстречу бегуну начинает дуть все усиливающийся ветер. Направление ветра постоянно, а его скорость меняется по закону $V = at^2$, где $a = \text{const}$, а t — время, прошедшее с момента старта. Сила сопротивления ветра $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\kappa \vec{v}_{\text{отн}}$ пропорциональна скорости относительного движения воздуха и атлета. С какой скоростью v должен бежать атлет, чтобы минимизировать свою работу по преодолению сопротивления ветра (работа атлета равна по величине и противоположна по знаку работе силы сопротивления ветра)?

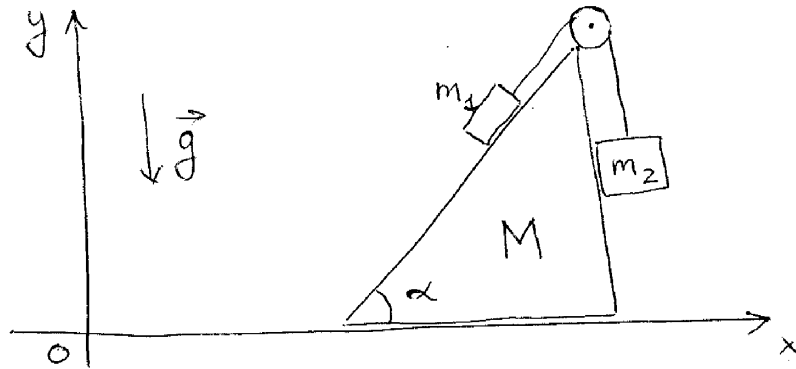
5. В цилиндрических координатах ϕ -компонента потенциального силового поля $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\phi \vec{e}_\phi + F_z \vec{e}_z$ имеет вид $F_\phi = \cos \phi f(r, z)$, где $f(r, z)$ — дифференцируемая функция. Определите наиболее общий возможный вид остальных компонент поля \vec{F} и соответствующий потенциал $U(r, \phi, z)$.

6. Тангенциальное силовое поле на \mathbb{R}^3 в сферических координатах имеет вид $\vec{F} = (0, F_\theta, F_\phi)$, то есть оно в любой точке пространства ортогонально ее радиус-вектору.

- Приведите пример тангенциального поля, которое потенциально. Найдите общий вид потенциального тангенциального поля.
- Существует ли потенциальное тангенциальное поле, которое на экваторе, то есть при $\theta = \pi/2$, имеет ϕ -компоненту $F_\phi(r) \neq 0$, не зависящую от ϕ ?

Rem: Не забудьте, что сферическая координатная система задается на неодносвязной области $\mathbb{R} \setminus \{Oz\}$.

7. Клин массы M с углом α при основании может перемещаться вдоль оси $O\vec{x}$. На вершине клина закреплен блок, через который перекинута нить с массами m_1 и m_2 на концах. Масса m_1 может перемещаться вдоль боковой поверхности клина, масса m_2 — вдоль его вертикальной стенки (см. рис.). Трение в системе отсутствует; блок невесом; нить натянута, нерастяжима, невесома и совершенно гибка; сила тяжести направлена против оси $O\vec{y}$. Составьте лагранжиан механической системы. Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа.



8. Материальная точка массы m движется в \mathbb{R}^3 по поверхности параболоида вращения

$$z = (x^2 + y^2)/2a = \rho^2/2a.$$

На точку действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз по оси $O\vec{z}$. Трение отсутствует.

- Составьте лагранжиан механической системы, используя цилиндрические координаты (ρ, ϕ, z) . Выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа для обобщенных координат ρ и ϕ .
- Выразите в цилиндрических координатах проекцию момента импульса частицы \vec{M} на ось $O\vec{z}$:

$$M_z = m [\vec{r}, \dot{\vec{r}}]_z.$$

Определите, как меняется со временем эта величина.

- У частицы есть специальные траектории движения, когда она движется все время оставаясь на одной высоте: $z = \text{const}$. Определите угловую частоту $\dot{\phi}$ движения частицы по таким траекториям.