Листок 1.8

Гладкие отображения.
Принцип сжимающих отображений

срок сдачи 18 мая

Задача 1. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_n$ многочленов одной переменной степени n со старшим коэффициентом 1. Отождествим $\mathcal{P}_n$ с $\mathbb{R}^n$, сопоставляя многочлену $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ точку $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$.
а) Найдите дифференциал отображения $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_{n+m}$, заданного как $(P, Q) \mapsto PQ$.
б) Найдите матрицу Якоби для этого отображения.
в)* Докажите, что дифференциал этого отображения вырожден в точке (P, Q) тогда и только тогда, когда многочлены P и Q имеют общий корень.
г)* Убедитесь, что якобиан рассматриваемого отображения равен результанту многочленов P и Q. Выведите отсюда теорему, что многочлены P и Q имеют общий корень тогда и только тогда, когда их результант равен нулю.

Задача 2. Найдите дифференциал отображения $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{2n+1}$, заданного как $P \mapsto PP'$.

Задача 3. Компактна ли единичная сфера в пространстве l_2?

Задача 4.* Докажите компактность Гильбертова кирпича: $H = \{x \in l_2 : |x_n| < 2^{-n}\}$.

Задача 5. При каких значениях параметров λ и μ следующие отображения $C[a, b] \to C[a, b]$ будут сжимающими: а) $f \mapsto (\lambda x + \mu)f$; б) $f \mapsto \lambda \int_\mu^x f(t)dt$?

Задача 6. Пусть $f : X \to X$ — сжимающее отображение: $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$, $q < 1$. Рассмотрим его *δ-псевдотраекторию* — такую последовательность $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, что $\rho(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ при всех $n \geq 0$.
а) Докажите, что если δ достаточно мало, то все точки псевдотраектории, начиная с некоторой, будут лежать в ε-окрестности неподвижной точки f. Укажите, как нужно выбрать δ по ε.
б*) Докажите, что если δ достаточно мало, то все точки псевдотраектории будут лежать на расстоянии не больше ε от некоторой траектории: $\rho(x_n, f^n(y)) < \varepsilon$.

Задача 7. Докажите, что неподвижная точка $\operatorname{fix} A$ сжимающего отображения A непрерывно зависит от отображения. Точнее, пусть A и B — два сжимающих отображения полного метрического пространства M в себя с константой сжатия $q < 1$. Пусть $\rho(A(x), B(x)) < \varepsilon$ для каждого $x \in M$. Найдите оценку сверху на расстояние $\rho(\operatorname{fix} A, \operatorname{fix} B)$.

Задача 8.* Рассмотрим $F\colon x \mapsto Ax + v$ — отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Докажите, что спектр линейного оператора A целиком лежит в круге $\{|\lambda| < 1\}$ тогда и только тогда, когда существует такая положительно определённая квадратичная форма, что в заданной ей метрике F является сжимающим.

Задача 9.* Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, не имеющий собственных значений на единичной окружности. Рассмотрим двустороннюю δ-псевдотраекторию $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ отображения $x \mapsto Ax$: $|x_{n+1} - Ax_n| < \delta$. Докажите, что существует такая константа C, зависящая только от оператора A, что для любой δ-псевдотраектории (x_n) найдётся единственная точка y, такая что $|x_n - A^n y| < C\delta$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (в таком случае говорят, что траектория $(A^n y)$ *отслеживает* псевдотраекторию (x_n)).

Задача 10. Докажите, что всякое компактное метрическое пространство полно.

Задача 11. Пусть F — гладкая функция на плоскости с координатами (x, y), и $D_y F \neq 0$.
а) Докажите, что каждая линия уровня этой функции — график $y = \varphi(x)$ гладкого отображения $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, где D — открытое подмножество прямой.
б*)Что можно сказать о поведении φ около концов каждого из интервалов из D?
в) Найдите области, где касательные к этим линиям уровня имеют положительный (отрицательный) наклон.
г*) Найдите области, где эти линии уровня выпуклы вверх (вниз).
д*) Пусть $F(0, 0) = 0$, $y = \varphi(x)$ — уравнение линии $F = 0$ вблизи нуля. Найдите частную сумму ряда Тейлора для $\varphi(x)$ в нуле до членов третьей степени включительно по ряду Тейлора функции F в нуле.