Материалы к семинарам по матанализу (второй семестр)

13-я и 14-я недели (16.04–28.04.2018)

Лекции 19–21

1. Нормальные формы отображений в окрестности некритических точек
2. Условные экстремумы (множители Лагранжа, необходимое условие, достаточное условие)

Примерные задачи семинаров 19–21

Ещё о заменах систем координат

Задача 7.1. Пусть r', φ' — полярные координаты с центром в точке $(1,0)$. Выразите:
а) dr' и $d\varphi'$ через dr и $d\varphi$;
б) $\partial f/\partial r'$ и $\partial f/\partial\varphi'$ через $\partial f/\partial r$ и $\partial f/\partial\varphi$;

Задача 7.2. Пусть $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ — две локальных системы координат в $\mathbb{R}^n$, т.е. матрица Якоби $(\partial y_i/\partial x_j)$ невырожденна в окрестности точки a.
а) Пусть дана гладкая кривая $x=x(t)$, $x(t_0)=a$. Как связаны столбцы $(\dot x_1(t_0),\ldots,\dot x_n(t_0))^T$ и $(\dot y_1(t_0),\ldots,\dot y_n(t_0))^T$?
б) Пусть дана гладкая функция F. Как связаны строки $(\partial F/\partial x_1(a),\ldots,\partial F/\partial x_n(a))$ и $(\partial F/\partial y_1(a),\ldots,\partial F/\partial y_n(a))$?
в) Проверьте, что $\sum_j \partial F/\partial x_j(a)\dot x_j(t_0)=\sum_j \partial F/\partial y_j(a)\dot y_j(t_0)$. Какой не зависящий от системы координат смысл имеет эта величина?

Задача 7.3. Второй дифференциал функции f в точке a — это квадратичная форма d^2f, значение которой на векторе h равно $\sum_{i,j}\partial^2 f(a)/\partial x_i\partial x_j h_i h_j$.
а) Как найти второй дифференциал, если дано разложение функции f в ряд Тейлора?
б) На примере перехода от евклидовых к полярным координатам на плоскости покажите, что задание второго дифференциала в одной системе координат не позволяет однозначно определить его в другой системе координат.
в) Докажите, что в критических точках функции f задание d^2f в одной системе координат однозначно задаёт его и в любой другой системе координат. Проверьте, что справедлива мнемоническая формула: если

$$d^2 f=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\,dx_i\,dx_j,$$

то подстановка в правую часть выражений для dx_i в виде линейных комбинаций dy_k и раскрытие скобок даёт верную формулу для второго дифференциала в системе координат (y_k).

Задача 7.4 (то же самое на другом языке)**.** Пусть a — критическая точка дважды гладкой функции f, H — диффеоморфизм $(\mathbb{R}^n,a)\to(\mathbb{R}^n,b)$.
а) Докажите равенство квадратичных форм $d^2(f\circ H)(a)$ и $(d^2f)(b)\circ dH(a)$.
б) Верно ли это, если a — некритическая точка?

Критические точки

Задача 7.5. Найдите критические точки, исследуйте их тип и нарисуйте линии уровня следующих функций:
а) x^2+y^2; б) x^2-y^2; в) xy; г) y^2-x+x^3; д) $y^2-x^2+x^4$;
е) $y^2+\cos x$; ж) $xy(x+y-1)$; з) $\sin(x+y)+\sin(x-y)$.

Задача 7.6. а) Сколько критических точек может иметь многочлен второй степени от двух переменных?
б) Тот же вопрос для числа морсовских (невырожденных) критических точек.

Квадратичные формы и их ограничения

Задача 7.7. Пусть квадратичная форма q на пространстве V имеет сигнатуру (n_+, n_-) (то есть приводится заменой координат к виду $x_1^2 + \dots + x_{n_+}^2 - x_{n_++1}^2 - \dots - x_{n_++n_-}^2$, $n_+ + n_- \le \dim V$).
а) Пусть U — гиперплоскость в V (подпространство с $\dim U = \dim V - 1$). Что можно сказать о сигнатуре ограничения q на U?
б*) Пусть квадратичная форма в евклидовом пространстве имеет спектр $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$, а её ограничение на U имеет спектр $\mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_{n-1}$. Докажите, что эти последовательности перемежаются, то есть $\lambda_j \le \mu_j \le \lambda_{j+1}$. (Напомним, что спектр квадратичной формы — это спектр соответствующего ей самосопряжённого оператора A_Q: если Q — поляризация формы q, то $Q(x,y) = \langle A_Q x, y\rangle$.)

Указание. а) Вспомните, как доказывается, что сигнатура формы определена однозначно.
б) Рассмотрите формы $q(x) - c|x|^2$.

Условные экстремумы

Задача 7.8. а) Пусть функция имеет морсовскую критическую точку с одним отрицательным квадратом у второго дифференциала (гессиана). Пусть Γ — гладкая гиперповерхность, проходящая через эту точку. Может ли эта точка быть условным минимумом?
б) Тот же вопрос, если число отрицательных квадратов гессиана больше 1.

Задача 7.9. Приведите пример функции f на плоскости с невырожденной критической точкой a, и двух кривых Γ_1, Γ_2, содержащих a, таких, что a — локальный минимум для $f|_{\Gamma_1}$ и локальный максимум для $f|_{\Gamma_2}$.

Задача 7.10. Пусть в точке a выполнено соотношение

$$df + \lambda_1 dg_1 + \dots + \lambda_m dg_m = 0 \tag{1}$$

при $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda^0 \in \mathbb{R}^m$. При каком условии на гессианы функций $f, g_1, \dots, g_m$ в точке a решения уравнения (1) (как уравнения на $\lambda \in \mathbb{R}^m$ и $x \in \mathbb{R}^n$) задаются как график C^1-гладкого отображения $\varphi\colon (\mathbb{R}^m, \lambda^0) \to (\mathbb{R}^n, a)$?

Задача 7.11. Найдите и исследуйте критические точки на единичной сфере в $\mathbb{R}^k$ для следующих функций: а) xy $(k = 2, 3)$; б) $5x^2 + 6xy + 5y^2$ $(k = 2, 3)$; в) $xy - z^2$ $(k = 3)$.

Задача 7.12. а) Как связаны критические точки ограничения квадратичной формы на единичную сферу с собственными векторами этой формы?
б) При каком условии на квадратичную форму эти критические точки будут морсовскими?

Задача 7.13.* Нарисуйте линии уровня квадратичной формы $ax^2 + by^2 + cz^2$, $a < b < c$ на единичной сфере.

Задача 7.14. Пусть Γ — некритическая линия уровня функции g, и $a \in \Gamma$ — точка, критическая для ограничения $f|_\Gamma$, но не для f. Доказать, что линия уровня функции f, содержащая a, касается Γ в точке a.

Задача 7.15. Найдите точки условных экстремумов функции u при указанных ограничениях:
а) $u = x^2 + y^2$ при $x/a + y/b = 1$ $(a, b > 0$ — заданные параметры);
б) $u = x^k y^l z^m$ при $x + y + z = a$, $x, y, z \ge 0$ $(a, k, l, m > 0$ — заданные параметры);
в) $u = xyz$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$;
г) $u = xy + yz$ при $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$, $x, y, z > 0$;
д) $u = x_1 b_1 + \dots + x_k b_k$ при $e^{b_1} + \dots + e^{b_k} = 1$ $(x_1, \dots, x_n \ge 0$ — заданные параметры, причём $\sum x_i = 1)$;
е) $u(x_1, \dots, x_k)$ — минимум функции из предыдущего пункта, при $x_j \ge 0$, $\sum_i x_i = 1$.

Задача 7.16. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $u = x + y + z$ в области, определённой неравенствами $x^2 + y^2 \le z \le 1$.

Дополнительные задачи

Задача 7.17* Пусть $r(t) = (x(t), y(t))$ — кривая на плоскости, $n(t)$ — вектор единичной нормали к ней. Для $a \in \mathbb{R}$ определим кривую $r_a(t) = r(t) + an(t)$. Выразите кривизну $k_a(t)$ (радиус кривизны $R_a(t) = 1/k_a(t)$) кривой $r_a(t)$ через таковые для исходной кривой.

Задача 7.18* Зафиксируем константы $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Для точки $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j > 0$, рассмотрим уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1. \tag{2}$$

а) Докажите, что оно имеет n различных вещественных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, причём

$$\lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \dots < \lambda_n < a_n.$$

Набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ называют *эллиптическими координатами* точки x.

б) Докажите, что n поверхностей, задаваемых формулой (2) при $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$, перпендикулярны друг другу в точке x. Выясните, какой аффинный тип имеют эти n поверхностей (кривых) при $n = 2, 3$.

в) Докажите, что отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является биекцией $\mathbb{R}^n_+$ на $(-\infty, a_1) \times (a_1, a_2) \times \dots \times (a_{n-1}, a_n)$, причём его якобиан всюду ненулевой.