

Группы и алгебры Ли II. Семинар 26.04.18

Задача 1. а) Для вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(p, q)$ определите: ее комплексификацию; вещественную инволюцию, ее выделяющую, автоморфизм Картана \mathfrak{g} и $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, разложение Картана.

б) Опишите векторную подалгебру Картана \mathfrak{a} вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(1, n)$ и систему ограниченных корней алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(1, n)$

в)* те же вопросы для алгебры Ли $\mathfrak{g} = su(p, q)$

Задача 2. Разложение $G = KAK$ и углы Эйлера.

а) Всякий элемент группы $SU(2)$ однозначно представляется в виде

$$u = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$, $-2\pi \leq \psi < 2\pi$.

б) Всякий элемент группы $SU(1, 1)$ однозначно представляется в виде

$$u = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} & i \operatorname{sh} \frac{\theta}{2} \\ i \operatorname{sh} \frac{\theta}{2} & \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}$$

где $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \infty$, $-2\pi \leq \psi < 2\pi$.

в) интерпретируйте предыдущие вычисления в терминах алгебр Ли;

г) Предложите вариант параметризации Эйлера групп $SL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{C})$

Задача 3. а) Пространство P_n положительно определенных симметрических матриц является однородным пространством относительно групп $GL(n, \mathbb{R})$ и $SL(n, \mathbb{R})$.

Найдите стабилизаторы выделенной точки и инволюции, их выделяющие б) Формула $(v, w)_p = \operatorname{Tr} v p^{-1} w p^{-1}$ задает инвариантную риманову метрику на P_n .

в) P_n - некомпактное симметрическое пространство отрицательной кривизны

г) каков ранг этого симметрического пространства?