

Задача 1. Пусть V - конечномерное вещественное векторное пространство. На вещественном пространстве и $V^{\mathbb{C}} = V \oplus V$ введен (на лекциях) оператор комплексной структуры I по формуле $I(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$. Пространство $V^{\mathbb{C}}$ с умножением на комплексные числа, определенным посредством оператора I , называется *комплексификацией пространства V* .

а) Условимся записывать векторы $(v_1, v_2) \in V^{\mathbb{C}}$ в виде $v_1 + iv_2$. Покажите, что такая запись согласована с введенной на $V^{\mathbb{C}}$ комплексной структурой, то есть для любого $z = a + bi \in \mathbb{C}$ и любого $v_1 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}}$ имеем $(a + bi)(v_1 + iv_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2)$.

б) Пусть $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ - какой-либо базис V . Докажите, что совокупность векторов $(e^{\mathbb{C}}) = (e_1^{\mathbb{C}}, \dots, e_n^{\mathbb{C}})$, где $e_k^{\mathbb{C}} := e_k + i0$, $1 \leq k \leq n$, - базис в $V^{\mathbb{C}}$.

Кватернионы

В задачах 2 и 3 рассматривается тело кватернионов $\mathbb{H}$, $(q_1, q_2) := \text{Re}(q_1 \bar{q}_2)$ - скалярное произведение на $\mathbb{H}$, $\mathbb{I}$ - его $\mathbb{R}$ -подпространство чисто мнимых кватернионов, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{I}$ - так называемые мнимые единицы, удовлетворяющие свойствам

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad (1)$$

Задача 2. Проверьте, что $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{I}$. Тем самым, эти векторы задают изоморфизм евклидова пространства $(\mathbb{I}, (\cdot, \cdot))$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением. Докажите, что при этом изоморфизме для произвольных кватернионов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{I}$ вещественная (соответственно, мнимая) часть их произведения равна их минус скалярному (соответственно, векторному) произведению:

$$\text{Re}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad \text{Im}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Задача 3. Пусть тройка чисто мнимых кватернионов q_1, q_2, q_3 удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (1):

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = -1, \quad q_1 q_2 = q_3 = -q_2 q_1, \quad q_2 q_3 = q_1 = -q_3 q_2, \quad q_3 q_1 = q_2 = -q_1 q_3. \quad (2)$$

Докажите, что $q_1 q_2, q_3$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{I}$, согласованный с базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Группа $SO(3)$

Задача 4. (i) Выведите следующие соотношения для матрицы $N = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$, где $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$:

$$N^3 = -N, \quad N^4 = -N^2, \quad N^5 = N, \dots$$

(ii) Докажите, что всякий элемент g группы $SO(3)$ как поворот на угол φ , $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, около оси с направляющим вектором $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, где $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, представим в виде матрицы $R_{\varphi, \mathbf{n}} = E + (\sin \varphi)N + (1 - \cos \varphi)N^2$, где N - матрица из пункта (i).

(iii) Воспользовавшись утверждениями пунктов (i) и (ii), докажите, что $R_{\varphi, \mathbf{n}} = \exp(\varphi N)$.

Дополнительные задачи к семинару 16

Задача 1. В условиях задачи 1 основного задания для произвольного ($\mathbb{R}$ -линейного) оператора $f: V \rightarrow V$ назовем его *комплексификацией* $f^{\mathbb{C}}$ оператор в пространстве $V^{\mathbb{C}}$, задаваемый формулой $f^{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = f(v_1) + if(v_2)$.

- а) Докажите, что это определение корректно, то есть что $f^{\mathbb{C}}$ - $\mathbb{C}$ -линейный оператор на $V^{\mathbb{C}}$.
б) Докажите, что матрица оператора $f^{\mathbb{C}}$ в базисе $(e^{\mathbb{C}})$ совпадает с матрицей оператора f в базисе (e) .

Задача 2. В условиях задачи 1 пусть на V имеется евклидова структура $g(u, v)$. Определим на его комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ эрмитово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ по формуле

$$(v_1 + iv_2, w_1 + iw_2) := g(v_1, w_1) + g(v_2, w_2) + i(g(v_2, w_1) - g(v_1, w_2)).$$

Докажите корректность этого определения.

Задача 3. В условиях и обозначениях задач 1 и 2 пусть $(f^{\mathbb{C}})^*$ - оператор, сопряженный оператору $f^{\mathbb{C}}$ относительно эрмитова скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$.

- а) Докажите, что

$$(f^{\mathbb{C}})^*(v_1 + iv_2) = f^*(v_1) + if^*(v_2), \quad v_1 + iv_2 \in V^{\mathbb{C}},$$

где f^* - линейный оператор на V , сопряженный оператору f относительно евклидовой структуры g на V .

- б) Докажите, что если f - ортогональный (соответственно, самосопряженный) относительно g линейный оператор в V , то $f^{\mathbb{C}}$ - унитарный (соответственно, самосопряженный) относительно $(\cdot, \cdot)$ линейный оператор в $V^{\mathbb{C}}$.