Логика и алгоритмы весна 2018.
Задачи для семинара N 2.

1. Опишите все автоморфизмы следующих моделей:
   (a) $(\mathbb{N}, <)$,
   (b) $(\mathbb{Z}, <)$,
   (c) $(\mathbb{Z}, +, =)$,
   (d) $(\mathbb{Q}, +, =)$,
   (e) $(\mathbb{R}, <)$,
   (f) (V, E), где V — множество вершин правильного n-угольника, $E(x, y)$ верно тогда и только тогда, когда x и y соединены ребром.

2. Докажите, что следующие предикаты не выразимы в следующих интерпретациях:+
   (a) предикаты «$x = 1$» и «$x = y + z$» в модели $(\mathbb{Z}, <)$;
   (b) предикаты «$x = 1$» и «$x = y$» в модели $(\mathbb{Z}, +, =)$;
   (c) предикат «$x = \frac{1}{2}$» в модели $(\mathbb{R}, <, 0, 1)$;
   (d) предикат «$x < y$» в модели $(\mathbb{N}, \vdots)$.

Выводимость в исчислении предикатов

3. Если $\Gamma, \alpha \vdash \gamma$ и $\Gamma, \beta \vdash \gamma$, то $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \gamma$.

4. Докажите выводимость следующих формул:
   (a) $\forall x \alpha \to \alpha$ и $\alpha \to \exists x \alpha$;
   (b) $\forall x \alpha \to \exists x \alpha$;
   (c) $\exists x \alpha \vee \exists x \beta \leftrightarrow \exists x (\alpha \vee \beta)$;
   (d) $\exists x \forall y \alpha \to \forall y \exists x \alpha$;
   (e) $(\exists x \alpha \to \beta) \leftrightarrow \forall x (\alpha \to \beta)$, если x не входит свободно в β;
   (f) $(\exists x \alpha(x) \to \forall y \beta(y)) \leftrightarrow \forall x \forall y (\alpha(x) \to \beta(y))$, если y не входит свободно в $\alpha(x)$ и x не входит свободно в $\beta(y)$.

5. Используя теорему корректности (все теоремы общезначимы), докажите, что следующие формулы не выводимы в исчислении предикатов:
   (a) $\forall y \exists x P(x, y) \to \exists x \forall y P(x, y)$;
   (b) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x (P(x) \wedge Q(x))$;
   (c) $\forall x (P(x) \vee Q(x) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.