Логика и алгоритмы весна 2018.
Задачи для семинара N 3.

(Все модели нормальные)

1. Найдите замкнутую формулу α, которая не выводится и не опровергается в исчислении предикатов с равенством в сигнатуре $\{=\}$.

2. Для той же теории постройте замкнутые формулы α и β, для которых не выводится ни одна из формул $\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \neg\beta$, $\neg\alpha \wedge \neg\beta$.

3. Пусть $A(p, q)$ — пропозициональнаЯ формула с двумя переменными, причем A —не тавтология. Докажите, что в сигнатуре $\{=\}$ найдутся замкнутые формулы β_1 и β_2, такие что формула $A(\beta_1, \beta_2)$ не выводится в исчислении предикатов.

Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если существует конечная теория с тем же множеством теорем. Теория T_1 — строгое расширение теории T, если множество теорем T_1 строго содержит множество теорем T.

4. *(Критерий Тарского)* Докажите, что если T_1, T_2,… — счетная последовательность теорий, где T_{i+1} — строгое расширение T_i, то объединение этих теорий не конечно аксиоматизируемо.

5. Если теория с равенством полна и имеет конечную модель, то она сильно категорична.

6. Рассмотрим теорию абелевых групп ABG в сигнатуре $\{0, +, =\}$. Теория абелевых групп без кручения $ABGTF$ получается из ABG добавлением аксиом

$$\forall x(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = 0 \to x = 0) \text{ для всех натуральных } n.$$

   (a) Докажите, что $ABGTF$ не является конечно аксиоматизируемой.
   (b) Полна ли эта теория?

7. В той же сигнатуре абелевых групп

   (a) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q}$;
   (b) $\mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$.

8. В той же сигнатуре: $Th(\mathbb{Q})$ не конечно аксиоматизируема.

9. Докажите, что теория полей характеристики 0 в сигнатуре $\{0, 1, +, \cdot, =\}$ не конечно аксиоматизируема.

10. В сигнатуре упорядоченных множеств $\{<, =\}$;

   (a) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q}$;
   (b) $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$;
   (c) $\mathbb{Z} + \mathbb{Q} \not\equiv \mathbb{Q} + \mathbb{Z}$.

   Здесь + означает упорядоченную сумму.

11. Пусть $\beta = \exists x_1 \ldots \exists x_n \alpha$ — замкнутая формула без функциональных символов и констант, где α не содержит кванторов. Докажите, что если β выполнима, то она имеет модель мощности не выше n.

12. Как изменится ответ, если в сигнатуре есть константы? Оцените сверху мощность модели.

13. Пусть в сигнатуре есть один одноместный фунциональный символ и равенство. Докажите, что для любого n существует формула $\alpha(x)$ без кванторов, такая что формула $\exists x\, \alpha(x)$ выполнима только в модели мощности не менее n.

14. Придумайте формулу в сигнатуре с одним одноместным функциональным символом и равенством, выполнимую только в бесконечной модели.

15. Пусть M — произвольная модель. Докажите, что для любого множества D той же мощности, что M, найдется модель M' с носителем D, изоморфная M.