Лекция 5

Принцип Даламбера: от ньютонова к лагранжеву формализму.

Ньютонов формализм неудобен тем, что в уравнениях Ньютона присутствуют заранее неизвестные силы реакции. Чтобы разобраться с ними, изучим подробней их свойства.

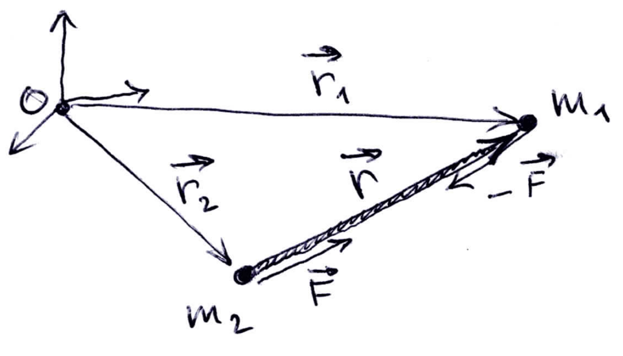
Как работают силы реакции:

Пример 1. Силы реакции в твёрдом теле.

Типичный элемент твердого тела — 2 материальных точки $m_1, \vec{r}_1$ и $m_2, \vec{r}_2$, соединённые жестким невесомым стержнем. Стержень обеспечивает ограничение на движение точек:

$$\boxed{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \text{const}}, \qquad (1)$$

называемое связью. Со стороны стержня (его концов) на точки действуют силы реакции (см. рис.), направленные вдоль стержня, равные по величине и противоположные по направлению (объясните).



$\vec{F}, -\vec{F}$ — силы реакции

$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Вычислим суммарную работу этих сил реакции при движении частиц. Для этого надо проинтегрировать 1-форму:

$$(\vec{F}, d\vec{r}_2) + (-\vec{F}, d\vec{r}_1) = -(\vec{F}, d\vec{r})$$

вдоль траектории движения частиц $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$.

Заметим, что в силу условия связи:

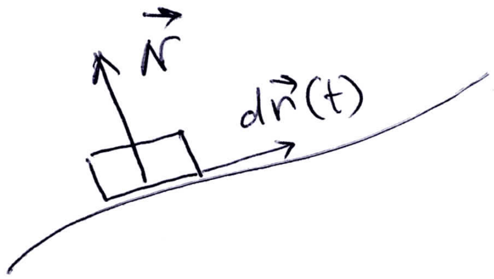
$$d(\vec{r}^{\,2}) = d((\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2) = 0, \text{ то есть}$$

$$(\vec{r}(t), d\vec{r}(t)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\vec{r}(t) \perp d\vec{r}(t)}$$

Однако $\vec{F} \parallel \vec{r}$, поэтому $\vec{F} \perp d\vec{r}(t)$, следовательно $(\vec{F}, d\vec{r}(t)) = 0$. Заключаем:

> В твердом теле суммарная работа сил реакции стержней при любом перемещении тела равна нулю.

Пример 2: Силы реакции опоры.



Рассмотрим движение тела (материальной точки) по гладкой опоре (см. рис.). Полагаем, что трение отсутствует.

В этом случае сила реакции опоры $\vec{N}$ должна удовлетворять условию $(\vec{N}, d\vec{r}(t)) = 0$

Здесь мы предположили, что тело не подпрыгивает при движении по опоре — связь удерживающая, а сама связь задается уравнением поверхности вида

$$\boxed{f(\vec{r}) = 0} \qquad (2)$$

В этом случае $d\vec{r}$ направлен по касательной к поверхности, а $\vec{N}$ ей ортогонален, и следовательно

Сила реакции опоры гладкой поверхности (2) работы не совершает.

Однако, как мы уже проверели на семинарах, сила реакции гладкой опоры может совершать работу в том случае, если опора движется и уравнение связи задается условием

$$\boxed{f(\vec{r}, t) = 0} \qquad (3)$$

В этом случае

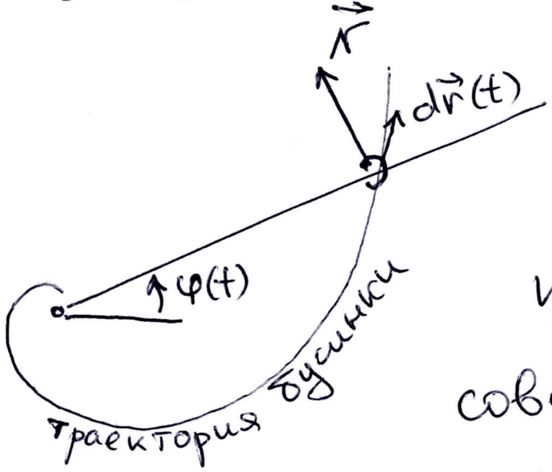
$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, d\vec{r}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0} \qquad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$d\vec{r} \not\perp \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, \text{ если } \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0,$$

и так как $\vec{N} \parallel \dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}}$, то $(\vec{N}, d\vec{r}(t)) \neq 0$

Наглядный пример такой ситуации — движение бусинки по вращающемуся стержню (см. Лекцию 1, стр 15). Вращающийся стержень — движущаяся опора, ее уравнение:



$$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi = \omega t},$$

поэтому $\vec{N} \not\perp d\vec{r}(t)$ и сила $\vec{N}$ совершает работу, приводящую к изменению кинетической энергии бусинки.

В системах со связями, явно зависящими от времени, типа (3), силы реакции движущихся опор перпендикулярны не реальным перемещениям тел $d\vec{r}(t)$, а, так называемым, виртуальным $\delta\vec{r}$

Def: Виртуальным перемещением материальной точки в момент времени $t=t_0$ называется любое ее возможное перемещение вдоль "замороженной" в момент t_0 связи.

Например, для связи (3) виртуальным является любое перемещение, удовлетворяющее условию

$$\boxed{\left(\frac{\partial f(\vec{r}, t_0)}{\partial \vec{r}}, \delta\vec{r}\right) = 0} \quad (5)$$

Отличие такого $\delta\vec{r}$ от $d\vec{r}$ (см. (4)) очевидно. Понятно также, что в разные моменты времени $t = t_0$ виртуальные перемещения $\delta\vec{r}$ будут разными.

Для бусинки на вращающемся стержне виртуальное перемещение — это перемещение вдоль радиуса:

$$\delta\vec{r} \parallel \vec{e}_\rho .$$

Понятие виртуальных перемещений для характеризации сил реакции использовал Даламбер.

Принцип Даламбера. В системе с идеальными связями суммарная работа сил реакции на любых виртуальных перемещениях равна нулю

Пояснение: идеальными называются связи, которые не порождают сил трения, сил неупругой деформации и т.п., то есть тех сил, которые могли бы "работать" на виртуальных перемещениях.

Воспользуемся принципом Даламбера для исключения сил реакции идеальных связей из уравнений Ньютона.

Итак, пусть наша механическая система состоит из n частиц: $\vec{r}_i$, m_i, $i=1,2,\ldots,n$. Пусть на "i"-ю частицу в системе действуют известная нам фундаментальная сила $\vec{F}_i$ (типа силы Кулона, силы тяжести...) и сила реакции идеальных связей $\vec{N}_i$. Уравнения Ньютона для системы имеют вид:

$$\boxed{m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{N}_i \qquad i=1,2,\ldots,n} \qquad (6)$$

Домножая (6) скалярно на виртуальные (позволенные "замороженными" связями) перемещения частиц $\delta\vec{r}_i$, и суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{N}_i, \delta\vec{r}_i)$$

В силу принципа Даламбера последнее слагаемое в правой части зануляется, и мы имеем:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i)} \qquad (7)$$

Уравнения (7) уже не содержат неизвестных сил реакции $\vec{N}_i$. Сколько уравнений в системе (7)? Ровно столько, какова размерность пространства виртуальных перемещений $\delta\vec{r}_i$. Это пространство, согласно (5), совпадает с касательным пространством к поверхности связей, при замороженном времени. Ну а размерность касательного пространства равна числу степеней свободы системы. Значит в системе (7) независимых уравнений столько, сколько степеней свободы системы, то есть достаточное количество.

Чтобы привести (7) к более удобному виду, предположим, что наша мех. система имеет N степеней свободы и допускает удобную параметризацию с помощью N, так называемых, обобщенных координат

$$\boxed{q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N}$$

Rem: термин "обобщенные координаты" — исторический. Означает, что q_α отличаются от обычных декартовых координат $\vec{r}_i$. В частности, полярные и сферические координаты можно отнести к обобщенным.

Движение частиц системы по поверхности связей при этом задаётся условиями

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N, t)} \quad (8)$$

Здесь $\vec{r}_i(\ldots)$ в правой части — это определенные функции своих аргументов, задающие параметрически поверхность связей. Из (8) получаем для виртуальных и реальных перемещений частиц и для их скоростей соотношения:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \ldots q_N, t)}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha \qquad (9a)$$

$$d\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \ldots q_N, t)}{\partial q_\alpha}\,dq_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \ldots q_N, t)}{\partial t}\,dt \qquad (9в)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \ldots q_N, t)}{\partial q_\alpha}\cdot \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i(q_1 \ldots q_N, t)}{\partial t} \qquad (9c)$$

Здесь $\delta q_\alpha / dq_\alpha$ — произвольный набор смещений/ /дифференциалов независимых друг от друга обобщенных координат. $\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}$ называются обобщенными скоростями.

Обратим внимание, что $\dot{\vec{r}}_i$ в (9c) — есть функция от обобщенных координат q_α, обобщенных скоростей $\dot{q}_\alpha$ и времени: $\dot{\vec{r}}_i(q_1 \ldots q_N, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_N, t)$, причём зависимость от $\dot{q}_\alpha$ — линейная. Из (9c) следует:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}} \qquad (10)$$

Заметим также, что оператор взятия полной производной по времени — $\frac{d}{dt}$ — в применении к $\vec{r}_i(q_1 \dots q_N, t)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt} = \sum_{\beta=1}^{N} \dot{q}_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} + \frac{\partial}{\partial t},$$

и он коммутирует с оператором взятия частной производной по q_α — $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$ (но не коммутирует с $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}$).

$$\boxed{\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)^{\bullet} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}} \qquad (11)$$

Теперь мы готовы преобразовать левую часть динамических уравнений (7), подставив туда выражения для $\delta\vec{r}_i$ (9а) и использовав (10), (11):

$$m_i(\ddot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_i\left(\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha =$$

перекидываем с $\ddot{\vec{r}}_i$ одну "•" на все скалярное произведение

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_i\left\{\left(\dot{\vec{r}}_i, \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}}_{(10)}\right)^{\bullet} - \left(\dot{\vec{r}}_i, \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)^{\bullet}}_{(11)}\right)\right\}\delta q_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_i\left\{\left(\dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)^{\bullet} - \left(\dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}\right)\right\}\delta q_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_i \cdot \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i)\right)^{\bullet} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i)\right\}\delta q_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)\frac{m_i\dot{\vec r}_i^{\,2}}{2}\right\}\delta q_\alpha .$$

Вспоминая, что кинетическая энергия системы $T_{кин}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot{\vec r}_i^{\,2}}{2}$, мы можем записать теперь левую часть (7) как:

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{N}\delta q_\alpha\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)T_{кин}.} \qquad (12a)$$

Преобразуем правую часть (7), предположив, что силы $\vec F_i$, действующие в системе, являются потенциальными, то есть существует функция потенциальной энергии $U(\vec r_1,\dots \vec r_n,t)$ (см. стр. 2-3 Лекции 3):

$$\boxed{\vec F_i=-\frac{\partial U(\vec r_1,\dots,\vec r_n,t)}{\partial \vec r_i}\equiv-\vec\nabla_i U(\vec r_1,\dots\vec r_n,t)}$$

Подставляем это в правую часть (7):

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec F_i,\delta\vec r_i)=-\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \vec r_i},\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha=$$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{N}\delta q_\alpha\frac{\partial}{\partial q_\alpha}U\Big(\underbrace{\vec r_1(q_1\dots q_N,t),\dots,\vec r_n(q_1\dots q_N,t)}_{\text{функции связей из (8)}},t\Big)$$

Заметим теперь, что среди аргументов U нет обобщенных скоростей $\dot q_\alpha$, поэтому $\frac{\partial U}{\partial \dot q_\alpha}=0$, и мы можем написать:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i,\delta\vec{r}_i)=\sum_{\alpha=1}^{N}\delta q_\alpha\Big(\underbrace{\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot q_\alpha}}_{\text{этот оператор действует тривиально на } U}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\Big)U} \qquad (12в)$$

Глядя на (12а) и (12в) естественно определить:

Def: Для механической системы n материальных точек $m_i,\vec{r}_i$, $i=1,\dots,n$, в которой действуют потенциальные силы $\vec{F}_i=-\vec{\nabla}_i U$, и движение которой подчиняется идеальным связям (8), функция

$$\boxed{L(q_1,q_2,\dots,q_N,\dot q_1,\dots,\dot q_N,t)=T_{кин}-U} \qquad (13)$$

называется лагранжианом системы.

Здесь кинетическая энергия $T_{кин}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}$, и пот. энергия U системы выражены как функции обобщенных координат и скоростей (см. (8), (9с)).

Теперь результаты преобразования (12а), (12в) уравнений (7) можно сформулировать в виде теоремы:

Th: Движение механической системы с потенциальными силами и идеальными связями полностью определяется ее лагранжианом $L(q,\dot q,t)$.

Её уравнения движения имеют вид:

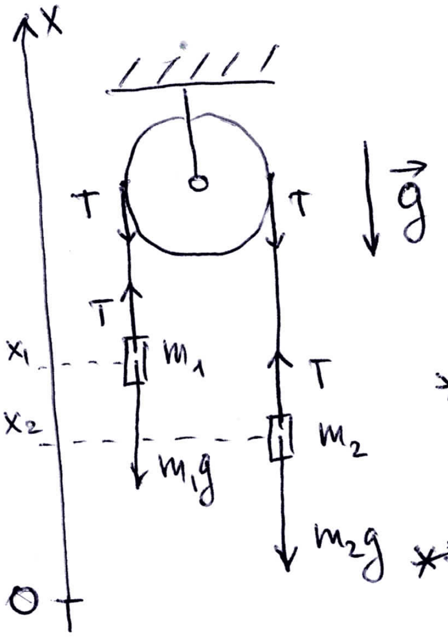
$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) L(q_1,\dots,q_N,\dot q_1,\dots,\dot q_N,t)=0, \quad \alpha=1,\dots,N.} \tag{14}$$

и называются уравнениями Эйлера-Лагранжа

Док-во: уравнения (14) следуют очевидно из (7), (12а), (12б), (14), если учесть, что виртуальные перемещения δq_α, $\alpha=1,2,\dots,N$, обобщенных координат линейно независимы.

Разберем несколько примеров:

Пример 1. Машина Атвуда (пример с семинаров)



2 груза на невесомой нерастяжимой абсолютно гибкой нити, перекинутой через невесомый блок, помещены в однородное поле тяжести.

*) x_1 и x_2 — две декартовы координаты системы (аналог $\vec r_i$).

**) $x_1+x_2=\mathrm{const}$ — условие идеальной связи (аналог (3))

Поэтому система имеет $2-1=1$ степень свободы. В качестве обобщенной координаты можно выбрать, скажем, $x := x_1$, тогда параметризованное с помощью x условие связи будет иметь вид:

***) $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \text{const} - x \end{cases}$ — аналог (8)

Выражая $T_{кин}$ и U в обобщенных координатах получаем

$$T_{кин} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)\dot{x}^2}{2}$$

$$U = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 = (m_1 - m_2) g x + \text{const}$$

$$\left(F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -m_1 g, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -m_2 g \text{ — как и требуется} \right)$$

****) Лагранжиан системы:

$$\boxed{L = T_{кин} - U = \frac{(m_1+m_2)\dot{x}^2}{2} - (m_1 - m_2) g x + \text{const}}$$

Заметим, что аддитивная константа несущественна как для потенциальной энергии, так и для лагранжиана. Дело в том, что и U и L потом дифференцируют для получения "физически" интересных сил $\vec{F}_i$ и уравнений движения, а при дифференцировании константы пропадают. Итак, аддитивные константы в U и L будем выбрасывать.

Посчитаем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -(m_1 - m_2) g$$

$\overset{***}{**}$) Значит уравнения движения имеют вид:

$$(m_1+m_2)\ddot{x} + (m_1-m_2)g = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{(m_2-m_1)}{(m_1+m_2)}g}$$

<u>Пример 2</u>: Материальная точка массы m движется в плоскости по кривой $y = f(x)$ (бусинка на кривой проволоке). Трения нет, внешних сил нет.

*) <u>декартовы координаты</u>: x, y

**) <u>обобщенная координата</u>, скажем, x,
<u>условие связи</u> $y = f(x)$

***) <u>Кинетическая энергия</u>:

$$T_{кин} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + f'^2(x))$$

Потенциальной энергии нет, поэтому

$$L(x,\dot{x}) = T_{кин} = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + f'^2(x))$$

Вычислим уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + f'^2(x)) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}(1+f'^2(x)) + 2m\dot{x}^2 f'(x) f''(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x}^2 f'(x) f''(x)$$

$\overset{**}{**}$) Уравнение Э-Л: $\boxed{m\ddot{x}(1+f'^2(x)) + m\dot{x}^2 f'(x) f''(x) = 0}$