21.03.2018 – 28.03.2018

С/К "R-матрицы" Лекции 10-11

Тематический план дальнейших занятий:

Будем изучать свойства квантовых матричных алгебр (квантовые группы – один из наиболее известных примеров таких алгебр).

- Квантование коммутативных пуассоновых алгебр (т.е. алгебр, на которых задана скобка Пуассона)
- Биалгебры и алгебры Хопфа
- Алгебра квантованных функций на группе $GL(n)$
- Алгебра уравнения отражений: структура и теория представлений.

Прежде всего, введём набор обозначений, которыми будем постоянно пользоваться в работе с матричными алгебрами.

Основное предназначение этих обозначений – уйти от работы с матричными элементами и переписать, по возможности, все формулы в терминах матриц и векторных пространств, к которым = 2 = относятся матрицы (например, в качестве матрицы линейного оператора, действующего в этом пространстве).

Матричные единицы.

$\{E^i_j,\ 1 \le i, j \le N\} \in Mat_N(\mathbb{C})$ - линейный базис в ассоциативной алгебре комплексных матриц размером $N \times N$ $Mat_N(\mathbb{C})$:

$\forall A \in Mat_N(\mathbb{C})$: $A = \sum\limits_{i,j=1}^{N} A^i_j E^i_j$, $A = \|A^i_j\|_1^N$,

где A^i_j - матричные элементы A. Первый индекс (i) всегда нумерует строки матрицы, второй индекс (j) - нумерует столбцы.

Тензорное произведение матриц

Пусть $A \in Mat_{N_1}(\mathbb{C})$, $A = \|A^i_j\|_1^{N_1}$

$B \in Mat_{N_2}(\mathbb{C})$, $B = \|B^i_j\|_1^{N_2}$

Тогда $A \otimes B \in Mat_{N_1 N_2}(\mathbb{C})$ - матрица с матричными элементами $(A \otimes B)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = A^{i_1}_{j_1} B^{i_2}_{j_2}$.

Здесь пара индексов $i_1 i_2$ (порядок важен) образует мультииндекс строки и столбца тензорного произведения. Упорядочение мультииндексов — лексикографическое:

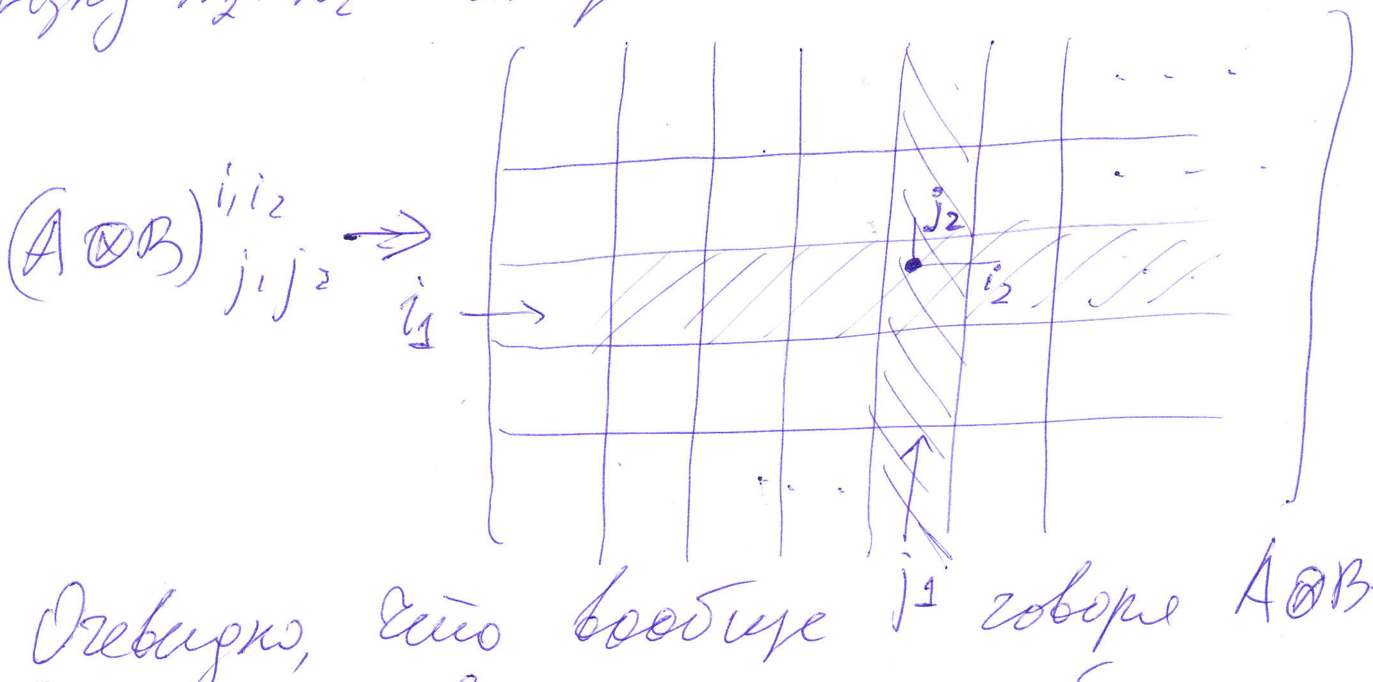
$$i_1 i_2 < j_1 j_2 \Leftrightarrow \begin{cases} i_1 < j_1 \\ \text{или} \\ i_1 = j_1, \text{ но } i_2 < j_2 \end{cases}$$

Пример $N_1 = 2$ $N_2 = 3$: номера ← столбцов

$$A \otimes B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} A^1{}_1 B^1{}_1 & A^1{}_1 B^1{}_2 & A^1{}_1 B^1{}_3 & \\ A^1{}_1 B^2{}_1 & A^1{}_1 B^2{}_2 & A^1{}_1 B^2{}_3 & A^1{}_2 \cdot B \\ A^1{}_1 B^3{}_1 & A^1{}_1 B^3{}_2 & A^1{}_1 B^3{}_3 & \\ \hline & & & \\ & A^2{}_1 \cdot B & & A^2{}_2 \, B \\ & & & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \end{array}$$

← номера строк

$A \otimes B$ имеет естественную блочную структуру: первый сомножитель A задаёт "крупную" нарезку $N_1 \times N_1$, второй сомножитель B определяет "мелкую" нарезку $N_2 \times N_2$ каждого блока.



Очевидно, что вообще j_1 говоря $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Рассмотрим важный для дальнейшего пример.

Пусть $A \in Mat_N(\mathbb{C})$. Рассмотрим 2 её вложения в $Mat_N(\mathbb{C}) \otimes Mat_N(\mathbb{C})$.

$$A_1 \equiv A \otimes \mathbb{1} = \begin{bmatrix} A^1{}_1 \mathbb{1} & A^1{}_2 \mathbb{1} & \cdots \\ A^2{}_1 \mathbb{1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & & \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} A^1{}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A^1{}_1 \end{matrix} & \begin{matrix} A^1{}_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A^1{}_2 \end{matrix} & \cdots \\ \hline N\left\{ \underbrace{\begin{matrix} A^2{}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A^2{}_1 \end{matrix}}_{N} \right. & & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \end{array}\right]$$

$$A_2 \equiv \mathbb{1} \otimes A = \begin{bmatrix} A & O_{N\times N} & \cdots \\ O_{N\times N} & A & O_{N\times N} \\ & O_{N\times N} & A & \cdots \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_N \\ \vdots & & \\ A^N{}_1 & \cdots & A^N{}_N \end{matrix} & O_{N\times N} \\ \hline O_{N\times N} & \cdots \end{array}\right]$$

Здесь $O_{N\times N}$ — нулевая матрица. Из определения матричного произведения получаем правило умножения матриц из $Mat_{N_1}(\mathbb{C}) \otimes Mat_{N_2}(\mathbb{C})$:
$$(A \otimes B)\cdot(\tilde{A} \otimes \tilde{B}) = (A \cdot \tilde{A}) \otimes (B \cdot \tilde{B})$$

Действительно:
$$\left[(A\otimes B)(\tilde{A}\otimes\tilde{B})\right]^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \sum_{a=1}^{N_1}\sum_{b=1}^{N_2} (A\otimes B)^{i_1 i_2}_{a b}\,(\tilde{A}\otimes\tilde{B})^{a b}_{j_1 j_2} =$$
$$= \sum_{a=1}^{N_1}\sum_{b=1}^{N_2} \left(\underline{A^{i_1}_a}\,\underline{B^{i_2}_b}\right)\cdot\left(\underline{\tilde{A}^a_{j_1}}\,\underline{\tilde{B}^b_{j_2}}\right) = \sum_{a=1}^{N_1}\left(A^{i_1}_a \tilde{A}^a_{j_1}\right)\sum_{b=1}^{N_2}\left(B^{i_2}_b \tilde{B}^b_{j_2}\right) =$$
$$= (A\tilde{A})^{i_2}_{j_1}\cdot(B\tilde{B})^{i_2}_{j_2} = \left[(A\tilde{A})\otimes(B\tilde{B})\right]^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}.$$

Вложение эндоморфизмов

Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} V = N$, $\hat{A} \in End(V)$ — линейный оператор в пространстве V.

Рассмотрим тензорное произведение $V^{\otimes m}$

$$V^{\otimes m} = \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{m \text{ сомножителей}}.$$

Обозначим $\hat{A}_i$ образ оператора $\hat{A}$ в алгебре $End(V^{\otimes m})$ относительно следующего вложения $End(V) \longrightarrow End(V^{\otimes m})$:

$$\hat{A}_i = (id_V)^{\otimes(i-1)} \otimes \hat{A} \otimes (id_V)^{m-i},$$

где id_V — тождественный оператор на V.

То есть, если $v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_m \in V^{\otimes m}$, то

$$\hat{A}_i \triangleright v_1 \otimes \ldots \otimes v_m = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i-1} \otimes (\hat{A} \triangleright v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_m$$

Аналогичные обозначения для операторов из $End(V^{\otimes k})$ при вложениях в $End(V^{\otimes m})$ $m > k$. Нам особенно важен будет случай $\hat{R} \in End(V^{\otimes 2})$.

Пусть $\{e_i\}_{1\le i\le N}$ — базис пространства V, тогда вектора $e_i\otimes e_j$ образуют базис $V^{\otimes 2}$. Оператор $\hat R$ в данном базисе задается матрицей $\|R^{ij}_{kl}\|$:

$$\hat R \triangleright e_i\otimes e_j = \sum_{a,b=1}^{N} e_a\otimes e_b\, R^{ab}_{ij} \equiv \hat R_{(1)}\otimes \hat R_{(2)}$$

или $\hat R = \sum \hat E^i_j \otimes \hat E^k_s R^{ik}_{js}$, где $\hat E^i_j \triangleright e_k = \delta_{jk} e_i$

Тогда этому оператору $\hat R$ мы будем сопоставлять $\hat R_{pk}\in End(V^{\otimes m})$ по формуле:

$$\hat R_{pk} = (id_V)^{\otimes(p-1)} \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ p\text{-е место}}}{\hat R_{(1)}} \otimes (id_V)^{\otimes k-p-1} \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ k\text{-е место}}}{\hat R_{(2)}} \otimes (id_V)^{m-k}$$

$p<k$

Действие на базисный вектор:

$$\hat R_{pk}\triangleright e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_m} =$$

$$= \sum_{a,b=1}^{N} e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_{p-1}}\otimes \underset{\substack{\uparrow\\ p\text{-е}\\ \text{место}}}{e_a} \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow\\ k\text{-е}\\ \text{место}}}{e_b} \otimes\dots\otimes e_{i_m}\, R^{ab}_{i_p i_k}$$

Если $k = p+1$ ($\hat{R}_{pp+1}$ действует в 2х соседних копиях пространства V) будем писать совсем кратко:

$$\hat{R}_{pp+1} \equiv \hat{R}_p :$$

$$\hat{R}_p = (id_V)^{\otimes p-1} \otimes \hat{R} \otimes (id_V)^{\otimes(m-p-1)}$$

$$\hat{R}_p : \quad V \otimes V \otimes \dots \otimes \underbrace{V \otimes V}_{p,\,p+1 \text{ копии}} \otimes \dots \otimes V$$

$\hat{R}_p$ действует только в этой паре.

Отметим, что для $\forall\, \hat{A}, \hat{B} \in End(V)$ $\hat{A}_i$ и $\hat{B}_j$ <u>коммутируют</u> (как элементы $End(V^{\otimes m})$) если $i \neq j$:

$$\hat{A}_i \hat{B}_j = \hat{B}_j \hat{A}_i$$

даже если $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ в $End(V)$.

То же верно для $\hat{R}_{ab}$ и $\hat{S}_{cd}$:

$\forall\, \hat{R}, \hat{S} \in End(V^{\otimes 2})$:

$$\hat{R}_{ab} \hat{S}_{cd} = \hat{S}_{cd} \hat{R}_{ab}$$

если множества индексов $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ имеют пустое пересечение:

$$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing.$$

Важный элемент $End(V^{\otimes 2})$ – оператор перестановки $\hat{P}$:

$$\forall\, u, v \in V: \quad \hat{P}\, u \otimes v = v \otimes u.$$

Действуя на базис $e_i \otimes e_j$ получаем матрицу этого оператора:

$$P^{ij}_{ks} = \delta^i_s \delta^j_k$$

Вложение $\hat{P}$ в $End(V^{\otimes n})$ обладает важным свойством:

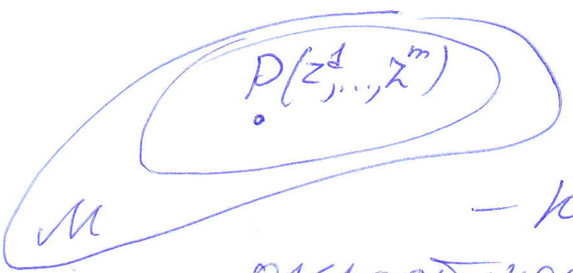
$$\hat{P}_{ks}\, \hat{S}_{i \ldots k \ldots s \ldots j} = \hat{S}_{i \ldots s \ldots k \ldots j}\, \hat{P}_{ks}$$

для $\forall\, \hat{S}$ из $End(V^{\otimes n})$.

Обратимся теперь к вопросу о квантовании коммутативной алгебры. Если говорить кратко, то квантование это переход от коммутативной алгебры к <u>некоммутативной</u>, с выполнением определённых условий, связывающих эти две алгебры.

Одно из важнейших условий проистекает из наличия <u>Пуассоновой структуры</u> в исходной коммутативной алгебре.

Рассмотрим достаточно общий пример алгебры с Пуассоновой структурой. Пусть M — некоторое гладкое многообразие с (локальными) координатами $\{z^i\}$, $\mathcal{F}(M)$ коммутативная алгебра гладких функций на M:



$f(P) = f(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}$. — функция из $\mathcal{F}(M)$ — непрерывно дифф. по z в окрестности P с локальными координатами $\{z^i\}$.

Пример

(i) В классической механике система из N частиц в трехмерном Евклидовом пространстве фиксируется точкой в $\mathbb{R}^m$ $(m = 3N)$ — конфигурационном пространстве системы. Фазовое пространство системы $M \simeq \mathbb{R}^{2m}$ имеет координаты $z^a = \{q_i, p^i\}$ (p^i — компоненты обобщённого импульса), наблюдаемые — это вещественные функции на M: $f(z) = f(q, p)$, содержащие всю информацию о физических свойствах системы. Пуассонова структура на функциях $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2m})$ задаётся скобкой Пуассона:

$$\{f(q,p), h(q,p)\} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial h}{\partial q_i} \right).$$

В частности:

$$\left.\begin{aligned} &\{q_i, q_j\} = \{p^i, p^j\} = 0 \\ &\{q_i, p^j\} = \delta_i^j \end{aligned}\right] \text{ Канонические скобки Пуассона.}$$

Дадим общее определение.

$\boxed{\text{О}}$ Скобка Пуассона на $\mathcal{F}(M)$ это билинейное, антисимметрическое отображение $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, удовлетворяющее свойствам:

(i) $\{f, h\} = -\{h, f\}$ $\forall f, h \in \mathcal{F}(M)$ — антисимметричность.

(ii) $\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, h\} = \alpha_1\{f_1, h\} + \alpha_2\{f_2, h\}$ — $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ — числа — билинейность (линейность по второму аргументу скобки следует из антисимметричности)

(iii) $\{f, \{h, g\}\} + \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{g, f\}\} \equiv 0$ $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(M)$ — тождество Якоби.

(iv) $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$ — $\forall f,g,h \in \mathcal{F}(M)$ — правило Лейбница.

$\boxed{3}$ Свойства (i)–(iii) означают, что относительно скобки Пуассона коммутативная алгебра $\mathcal{F}(M)$ образует алгебру Ли (вообще говоря, некоммутативную (неабелеву)).

Свойство (iv) означает, что скобка Пуассона задает некоторое дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(M)$.

Пользуясь свойствами (i)–(iv) определения можно показать, что любая скобка Пуассона на многообразии может быть записана в виде:

$$\{f(z), h(z)\} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^i}\,\omega^{ij}(z)\,\frac{\partial h}{\partial z^j}.$$

Здесь $\omega^{ij}(z) = \{z^i, z^j\}$ — компоненты антисимметрического тензора второго ранга (Пуассонов тензор).

$\boxed{\text{O}}$ Скобка Пуассона называется вырожденной, если $\exists\ I(z) \not\equiv const, I(z) \in \mathcal{F}(M)$, такая, что $\{I(z), f(z)\} = 0\ \ \forall f(z) \in \mathcal{F}(M)$.

Функции $I(z)$ с таким свойством

(iv) $\{f, g\cdot h\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ — $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(M)$ — правило Лейбница.

$\boxed{3}$ Свойства (i)–(iii) означают, что относительно скобки Пуассона коммутативная алгебра $\mathcal{F}(M)$ образует алгебру Ли (вообще говоря, некоммутативную (неабелеву)).

Свойство (iv) означает, что скобка Пуассона задает некоторое дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(M)$.

Пользуясь свойствами (i)–(iv) определения можно показать, что любая скобка Пуассона может быть записана в виде:

$$\{f(z), h(z)\} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z^i}\,\omega^{ij}(z)\,\frac{\partial h}{\partial z^j}.$$

Здесь $\omega^{ij}(z) = \{z^i, z^j\}$ — компоненты антисимметрического тензора второго ранга (Пуассонов тензор).

$\boxed{О}$ Скобка Пуассона называется вырожденной, если $\exists\ I(z) \not\equiv const, I(z) \in \mathcal{F}(M)$, такая, что $\{I(z), f(z)\} = 0\ \forall f(z) \in \mathcal{F}(M)$.

Функции $I(z)$ с таким свойством

образуют Пуассонов центр алгебры $\mathcal{F}(M)$.

<u>Квантование коммутативной Пуассоновой алгебры</u> $\mathcal{F}(M)\equiv\mathcal{F}$ – это некоммутативная алгебра $\mathcal{F}_h$ над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[h]]$ от параметра квантования h такая, что:

- $\exists$ <u>изоморфизм</u> $\mathbb{C}[[h]]$-модулей $\mathcal{F}_h\cong\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}[[h]]$, который мы обозначим
$\alpha_h:\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}[[h]]\to\mathcal{F}_h,\ \alpha_h^{-1}:\mathcal{F}_h\to\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}[[h]]$
- Нулевая по h компонента $\mathcal{F}_h$ <u>изоморфна</u> $\mathcal{F}$ относительно α_h: $\mathcal{F}_0\equiv\mathcal{F}_h/h\cdot\mathcal{F}_h\cong\mathcal{F}$.
- Изоморфизм α_h позволяет задать на коммутативной алгебре $\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}[[h]]$ новое <u>некоммутативное</u> произведение $*_h$:

$$\forall f\text{ и } g\in\mathcal{F}:\quad f*_h g=\alpha_h^{-1}(\alpha_h(f)\circ\alpha_h(g))$$

произведение элементов $\mathcal{F}_h$

$$f*_h g=f\cdot g+h\,c_1(f,g)+h^2c_2(f,g)+\dots,$$

коммутативное произведение

$c_i(f,g)\in\mathcal{F}$

$\boxed{3}$ Алгебра $\mathcal{F}\otimes\mathbb{C}[[h]]$ с $*_h$ изоморфна $\mathcal{F}_h$:

$$\alpha_h(f*_h g)=\alpha_h(f)\circ\alpha_h(g)$$

где $c_1(f,h),\ c_2(f,h), \ldots \in \mathcal{F}$.

При этом должен выполняться "<u>квазиклассический предел</u>":

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f *_h g - g *_h f}{h}\right) = c_1(f,g) - c_1(g,f) = \{f,g\},$$

где $\{f,g\}$ — скобка Пуассона на $\mathcal{F}$.

Наш основной пример — функции на матричной алгебре $Mat_N(\mathbb{C}) = M$. Мы ограничимся <u>регулярными</u> функциями на M (т.е. полиномами от генераторов t^i_j).

Рассмотрим линейные функции на M. и введем <u>базис</u> $t^i_j \in Mat^*_N(\mathbb{C})$:

$$\forall A \in Mat_N(\mathbb{C}) \quad t^i_j(A) = A^i_j, \quad 1 \le i,j \le N.$$

Набор из N^2 линейных функций t^i_j дает набор <u>генераторов</u> алгебры регулярных функций на $Mat_N(\mathbb{C})$.

Относительно "поточечного" умножения

Эти функции генерируют коммутативную алгебру:

$$(t^i_j \cdot t^k_s)(A) := t^i_j(A) t^k_s(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^i_j \cdot t^k_s = t^k_s \cdot t^i_j$$

Регулярными мы будем называть <u>полиномиальные</u> функции от N^2 образующих t^i_j.

Например, однородный полином N-го порядка $D = \sum_{i_1, i_2, \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} t^{i_1}_1 t^{i_2}_2 \dots t^{i_N}_N$ ($\varepsilon_{i_1 \dots i_N}$ - полностью антисимметрический тензор N-го порядка) вычисляет определитель матриц:

$$D(A) = (\det A).$$

$$D \in \mathcal{F}_{reg}(Mat_N(\mathbb{C})).$$

Алгебру регулярных функций $\mathcal{F}_{reg}(Mat_N(\mathbb{C}))$ можно снабдить разными Пуассоновыми структурами.

(I) <u>Структура Пуассона-Ли</u>

(связана с алгеброй Ли $gl(n)$).

$$\{t^i_j, t^k_s\}_{PL} = \delta^k_j t^i_s - \delta^i_s t^k_j.$$

$\boxed{3}$ Эта скобка представляет собой частный случай общей конструкции. Пусть g — конечномерная алгебра Ли с базисом $\{e_i\}_{1\le i\le m}$ со скобкой Ли:

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^{\ k} e_k,$$

где $c_{ij}^{\ k}$ — структурные константы.

Тогда алгебра функций $Fun(g^*)$ на <u>дуальном</u> пространстве g^* (это пространство линейных функционалов на g) $Fun(g^*) \simeq Sym(g)$, является Пуассоновой алгеброй со скобкой

Симметрическая алгебра пространства g

$$\{f(x), h(x)\} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{ij}^{\ k} x_k \frac{\partial h}{\partial x_j}$$

где x_k — координаты на g^*, отвечающие дуальному к $\{e_i\}$ базису $\{e^i\}$.

$$\langle \epsilon^i, e_j \rangle = \delta^i_j$$

$$\forall \xi \in g^* : \xi = \sum_{i=1}^{m} x_i \epsilon^i$$

В нашем примере правая часть скобки $\{t^i_j, t^k_s\}$ содержит структурные константы алгебры Ли $gl(N)$.

Введем матрицы из генераторов:

$$T = \begin{bmatrix} t^1{}_1 & t^1{}_2 & \dots & t^1{}_N \\ \vdots & & & \vdots \\ t^N{}_1 & t^N{}_2 & \dots & t^N{}_N \end{bmatrix} = \| t^i_j \|_1^N$$

Смысл этого объекта следующий:

$$T = \sum_{i,j=1}^{N} E^i_j \otimes t^i_j \in Mat_N(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}.$$

$$T_1 = T \otimes \mathbb{1}_{N \times N} = \sum_{ij} E^i_j \otimes \mathbb{1}_{N \times N} \otimes t^i_j$$

$$T_2 = \mathbb{1}_{N \times N} \otimes T = \sum_{ij} \mathbb{1}_{N \times N} \otimes E^i_j \otimes t^i_j$$

$$T_1 \text{ и } T_2 \in Mat_{N^2}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{F}$$

Обозначим $\{T_1, T_2\}_{PL}$ $N^2 \times N^2$ матрицу с матричными элементами

$$\{T_1, T_2\}^{i_1 i_2}_{PL\; j_1 j_2} = \{t^{i_1}_{j_1}, t^{i_2}_{j_2}\}_{PL},$$

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = \sum_{i,j,k,s=1}^{N} E^i_j \otimes E^k_s \otimes \{t^i_j, t^k_s\}_{PL}$$

В этих обозначениях скобка Пуассона-Ли примет вид:

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12} T_1 - T_1 P_{12},$$

$$\boxed{P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} E^i_j \otimes E^j_i}$$

матрица перестановки

Легко проверяются <u>свойства</u>:

$\boxed{\text{IV}}$ а) Скобка Пуассона-Ли инвариантна относительно присоединённого действия группы $GL(N)$:

$$T \mapsto \tilde{T} = M T M^{-1}, \quad \forall M \in GL(N)$$

$$\tilde{t}^i_j = \sum_{k,s} M^i_k t^k_s (M^{-1})^s_j$$

Для преобразованных генераторов скобка остаётся неизменной:

$$\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\}_{PL} = P_{12} \tilde{T}_1 - \tilde{T}_1 P_{12}$$

б) Полиномы $p_k(T) = \mathrm{Tr}(T^k) =$

$$= \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le N} t^{i_1}_{i_2} t^{i_2}_{i_3} \ldots t^{i_{k-1}}_{i_k} t^{i_k}_{i_1}$$

принадлежат Пуассонову центру $\mathcal{F}(Mat_N(\mathbb{C}))$: $\{p_k(T), t^i_j\}_{SK} = 0$ $\forall k, i, j$.

<u>Пример $N=2$</u>

$$T = \begin{pmatrix} t^1_1 & t^1_2 \\ t^2_1 & t^2_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &\{a,b\} = b \\ &\{a,c\} = -c \\ &\{a,d\} = 0,\ \{b,d\} = b \\ &\{b,c\} = a-d,\ \{c,d\} = -c \end{aligned}$$

(II) <u>Скобка Склянина</u>

Рассмотрим другую скобку на $\mathcal{F}(Mat_N(\mathbb{C}))$ с <u>квадратичной</u> правой частью:

$$\{t^i_j, t^k_s\}_{SK} = \sum_{a,b=1}^{N} \left(t^i_a t^k_b \, r^{ab}_{js} - r^{ik}_{ab} \, t^a_j t^b_s \right)$$

$$r = \| r^{ij}_{ks} \| \in Mat_{N^2}(\mathbb{C})$$

В матричном виде:

$$\{T_1, T_2\}_{SK} = [T_1 T_2, r_{12}] =$$

$$= T_1 T_2 r_{12} - r_{12} T_1 T_2$$

Чтобы так введённая операция была скобкой Пуассона, необходимы некоторые условия на матрицу r_{12}.

Посмотрим, например, на условие антисимметричности:

$$\{T_1, T_2\}_{Sk} + \{T_2, T_1\}_{Sk} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[T_1 T_2, r_{12}] + [T_2 T_1, r_{21}] = 0$$

$$r_{21} = P_{12} r_{12} P_{12}$$

Но так как алгебра функций на $Mat_n(\mathbb{C})$ коммутативна, то $T_2 T_1 = T_1 T_2$ и мы получаем:

$$[T_1 T_2, r_{12} + r_{21}] = 0,$$

То есть, матрица $r_+ = \frac{r_{12} + r_{21}}{2}$ должна коммутировать с $T_1 T_2$.

Можно доказать следующее утверждение:

$\boxed{\text{IV}}$ Для выполнения тождества Якоби: $\{T_1,\{T_2,T_3\}_{Sk}\}_{Sk}+\{T_3,\{T_1,T_2\}_{Sk}\}_{Sk}+$

$$+\{T_2,\{T_3,T_1\}_{Sk}\}_{Sk}=0$$

достаточно, чтобы r удовлетворяла <u>классическому уравнению</u> Янга-Бакстера:

$$[r_{12},r_{13}]+[r_{12},r_{23}]+[r_{13},r_{23}]=0.$$

Такая r называется <u>классической</u> <u>r-матрицей.</u>

Есть ли такие r-матрицы?

У нас был пример R-матрицы Дринфельда-Джимбо:

$$R=q\sum_{i=1}^{n}E^i_i\otimes E^i_i+\sum_{i\neq j}E^i_j\otimes E^j_i+\left(q-\frac{1}{q}\right)\sum_{i<j}E^i_i\otimes E^j_j$$

Введём связанную с ней $\check{R}$-матрицу:

$$\check{R}=PR=q\sum_{i=1}^{n}E^i_i\otimes E^i_i+\sum_{i\neq j}E^j_i\otimes E^i_j+$$

матрица перестановки

$$+\left(q-\frac{1}{q}\right)\sum_{i>j}E^i_j\otimes E^j_i.$$

Пользуясь свойствами P (типа перестановок $P_{12}R_{23}=R_{13}P_{12}$ и т.д.)

легко доказать, что

$$R_{12}R_{23}R_{12}=R_{23}R_{12}R_{23} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow R_{12}R_{13}R_{23}=R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Введём параметр h: $q=e^{h}\simeq 1+h+o(h)$.

В <u>первом</u> порядке по h имеем:

$$R=\mathbb{1}+h\,r+o(h),\ \text{где}$$

$$r=\sum_{i=1}^{N}E^i_i\otimes E^i_i+2\sum_{i>j}E^i_j\otimes E^j_i.$$

Это пример r-матрицы. То, что она удовлетворяет классическому уравнению Янга-Бакстера можно проверить и непосредственным вычислением, однако более простой способ, подходящий для $\forall$ R-матрицы — состоит в разложении до второго порядка по h уравнения Янга-Бакстера:

$$\left.\begin{aligned}&0=R_{12}R_{13}R_{23}-R_{23}R_{13}R_{12}\\&R_{12}=1+h\,r_{12}+o(h)\\&R_{13}=1+h\,r_{13}+o(h)\\&R_{23}=1+h\,r_{23}+o(h)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

Нулевой и первый порядок по h
сократятся, а во втором порядке останется классическое уравнение Янга-Бакстера.

Далее, $r_{21} = P_{12} r_{12} P_{12} = \sum_{i=1}^{N} E^i_i \otimes E^i_i + 2\sum_{i<j} E^i_j \otimes E^j_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_{21} + r_{12} = 2\sum_{i,j=1}^{N} E^i_j \otimes E^j_i = 2P_{12},$$

поэтому $[T_1 T_2,\ r_{12} + r_{21}] = 0$ тоже выполнено.

Итак, классическая r-матрица Дринфельда-Джимбо обеспечивает <u>пуассоновость</u> скобки Склянина.

$\boxed{3}$ Классическая r-матрица, полученная из <u>любой</u> Гекковской R-матрицы (существует много примеров Гекковских R-матриц помимо Дринфельд-Джимбовской) даёт скобку Пуассона.

Действительно, тождество Якоби будет иметь место, поскольку есть классическое уравнение Янга-Бакстера на r.

А свойство $r_{12} + r_{21} = 2P_{12}$ есть следствие условия Гекке:

$$R_{12}^2 = 1 + \left(q - \frac{1}{q}\right) R_{12} \qquad R_{12} = P_{12} R = P_{12} + h P_{12} r_{12} + o(h)$$

$$\mathbb{1} + h r_{12} + h P_{12} r_{12} P_{12} + o(h) =$$
$$= \mathbb{1} + 2h P_{12} + o(h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{r_{12} + r_{21} = 2 P_{12}}$$

В отличие от скобки Пуассона-Ли, скобка Склянина <u>не</u> инвариантна относительно присоединённого действия $GL(N)$. Полиномы $p_k(T) = Tr(T^k)$ <u>не</u> принадлежат Пуассоновому центру, а образуют Пуассон-коммутативную подалгебру: $\{p_k(T), p_s(T)\}_{SK} = 0 \quad \forall k,s$

~~Цен~~ Пуассонов центр скобки Склянина генерируется <u>детерминантом</u> T:

$$D(T) = \det T = \sum_{\{i\}} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} T^{i_1}_1 \dots T^{i_N}_N$$

$$\{\det T, t^i_j\}_{SK} = 0 \quad \forall i,j.$$

<u>Пример №2.</u>

$$r_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a, b\}_{SK} = a \cdot b \qquad \{b, c\}_{SK} = 0$$
$$\{a, c\}_{SK} = ac \qquad \{b, d\}_{SK} = bd$$
$$\{a, d\}_{SK} = 2bc \qquad \{c, d\}_{SK} = cd.$$

$$D(T) = ad - bc : \{D(T), x\}_{SK} = 0 \quad x = a, b, c, d.$$

III Скобка Семёнова-Тянь-Шанского

Это тоже квадратичная скобка, она задаётся соотношением:

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = r_{21} T_1 T_2 - T_1 T_2 r_{12} + T_2 r_{12} T_1 - T_1 r_{21} T_2. \quad (*)$$

Мы будем считать, что классическая r-матрица r_{12} происходит из Гекковой R-матрицы R_{12} (не обязательно Дринфельд-Джимбовской).

Как мы уже выяснили, для таких r-матриц выполнено свойство $r_{12}+r_{21}=2P_{12}$.

Это свойство гарантирует антисимметричность скобки Семёнова-Тянь-Шанского:

$$\{T_1, T_2\}_{STS} = -\{T_2, T_1\}_{STS};$$

Действительно, заметим, что

$$\{T_2, T_1\}_{STS} = P_{12}\{T_1, T_2\}_{STS} P_{12}$$

в силу билинейности скобки.

Поэтому антисимметрия скобки $\{,\}_{STS}$ эквивалентна тому, что правая часть её определения $(*)$ меняет знак при умножении с двух сторон на P_{12}.

Последние 2 слагаемых в (*) удовлетворяют этому свойству автоматически для $\forall\ N^2\times N^2$ матрицы τ_{12} просто в силу определения $\tau_{21} = P_{12}\tau_{12}P_{12}$, поэтому рассмотрим первые 2 слагаемых.

~~[illegible]~~ Преобразуем тождественно τ:

$$\tau_{12} \equiv \frac{\tau_{12}+\tau_{21}}{2} + \frac{\tau_{12}-\tau_{21}}{2} = P_{12} + (\tau_-)_{12}.$$

Реккевость!

Матрица τ_- обладает очевидной антисимметрией: $P_{12}(\tau_-)_{12}P_{12} = -(\tau_-)_{12}$

Теперь получаем для 2х первых слагаемых:

$$\tau_{21}T_1T_2 - T_1T_2\tau_{12} \equiv \left(P_{12} - (\tau_-)_{12}\right)T_1T_2 - T_1T_2\left(P_{12} + (\tau_-)_{12}\right) = \cancel{P_{12}T_1T_2 - T_1T_2P_{12}} - (\tau_-)T_1T_2 - T_1T_2(\tau_-) = \underline{-(\tau_-)T_1T_2 - T_1T_2(\tau_-)}$$

$PT_1T_2 = T_1T_2P$ в силу коммутативности алгебры функций. Конечное выражение меняет знак при умножении на P_{12} с 2х сторон в силу свойства антисимметрии матрицы τ_-.

Важное свойство скобки Семенова-Тянь-Шанского касается её Пуассонова центра: он содержит в себе Пуассонов центр скобки Пуассона-Ли:

$\boxed{\text{V}}$ Полиномы $p_k(T) = \mathrm{Tr}(T^k)$ принадлежат Пуассонову центру скобки Семенова-Тянь-Шанского:

$$\{p_k(T), t^i_j\}_{STS} = 0 \quad \forall k, i, j.$$

Рассмотрим вопрос о квантовании алгебры функций с различными Пуассоновыми структурами.

$I^{(9)}$ Квантование скобки Пуассона-Ли.

Квантование коммутативной алгебры ~~функций~~ регулярных функций на $Mat_N(\mathbb{C})$ со структурой Пуассона-Ли:

$$\{T_1, T_2\}_{PL} = P_{12} T_1 - T_1 P_{12}$$

приводит к некоммутативной алгебре $U(gl(N)_h)$ универсальной обёртывающей алгебре алгебры Ли $gl(N)_h$.

Алгебра Ли $gl(N)_h$ (если h – ненулевое комплексное число) есть N^2 мерное комплексное векторное пространство V с базисом e^i_j, а скобка Ли задается формулой:

$$[e^i_j, e^k_s] = h(\delta^k_j e^i_s - \delta^i_s e^k_j),$$

отличаясь от скобки Ли классической $gl(N)$ простой перенормировкой базисных элементов.

Мы хотим считать h – независимым параметром квантования и поэтому пространство $gl(N)_h$ есть тензорное произведение

$$V \otimes \mathbb{C}[h],$$

где $\mathbb{C}[h]$ – алгебра полиномов параметра h.

$\boxed{3}$ $\mathbb{C}[h] \subset \mathbb{C}[[h]]$. Для квантования скобки Пуассона-Ли достаточно $\mathbb{C}[h]$, вместо кольца формальных рядов $\mathbb{C}[[h]]$, фигурирующего в определении квантования.

Напомним конструктивное определение универсальной обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} \cong \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_n) = V$

$[e_i, e_j] = C_{ij}^{\ k} e_k$, $C_{ij}^{\ k}$ — структурные константы $\mathfrak{g}$.

(i) Строим <u>свободную тензорную алгебру</u> пространства V:

$$\mathbb{T}(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus V^{\otimes k} \oplus \dots$$

Элементами $\mathbb{T}(V)$ <u>по определению</u> являются <u>конечные</u> линейные комбинации векторов из пространств $V^{\otimes k}$.

Умножение элементов $\mathbb{T}(V)$ порождается умножением "мономов": $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$, $u_1 \otimes \dots \otimes u_m \in V^{\otimes m}$, то

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) \cdot (u_1 \otimes \dots \otimes u_m) \stackrel{def}{=} v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_m \in V^{\otimes (k+m)}$$

(ii) Рассмотрим набор $\mathcal{J}$ векторов из $V \oplus V^{\otimes 2}$ вида:

$$\mathcal{J} = \{ e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - C_{ij}^{\ k} e_k \mid \forall i,j : 1 \le i,j \le n \},$$

и построим двухсторонний <u>идеал</u> в $\mathbb{T}(V)$, порождённый набором $\mathcal{Y}$.

$$\langle \mathcal{Y} \rangle = \mathbb{T}(V) \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathbb{T}(V)$$

(iii) Фактор-алгебра

$$\mathcal{U}(g) = \mathbb{T}(V) / \langle \mathcal{Y} \rangle$$ называется

универсальной обёртывающей алгеброй g алгебры Ли g.

Алгебра $\mathcal{U}(g)$ (как и $\mathbb{T}(V)$) раскладывается в прямую сумму однородных компонент

$$\mathcal{U}(g) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{U}^{(1)} \oplus \mathcal{U}^{(2)} \oplus \ldots$$

где $\mathcal{U}^{(1)} = V$, а $\mathcal{U}^{(k)}$ – линейная оболочка мономов $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ $1 \le i_k \le N$.

Только в отличие от $\mathbb{T}(V)$ не все эти мономы линейно-независимы в фактор-алгебре $\mathcal{U}(g)$. Этот вопрос решается теоремой Пуанкаре–Биркхофа–Витта о базисе в $\mathcal{U}(g)$ (ПБВ-базис).

$\boxed{\text{V}}$ Линейно упорядочим произвольным образом базис пространства V, т.е зададим нумерацию $e_1, e_2, \ldots, e_N$.

Тогда линейный базис в однородных компонентах $U^{(k)}$ задаётся мономами $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ с наборами индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le N$.

Это утверждение означает:

а) все такие мономы линейно-независимы

б) Любой моном $e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_k}$ можно однозначно представить в виде линейной комбинации базисных мономов степени $\le k$ в силу перестановочных соотношений алгебры Ли g, налагаемых идеалом $\langle J \rangle$ в определении $U(g)$.

Пример $gl(2)$: базис $e^1{}_1 = a$, $e^1{}_2 = b$, $e^2{}_1 = c$, $e^2{}_2 = d$.

$[a, b] = b$

$[a, c] = -c \quad [b, c] = a - d$

$[a, d] = 0 \quad [b, d] = b \quad [c, d] = -c$,

все остальные скобки равны 0.

ПБВ базис в $U^{(n)}$ можно выбрать в виде элементов $a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4}$ (мы опустили знак $\otimes$), где $k_i \ge 0$ и $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$.

Для $U(gl(n)_h)$ конструкция аналогична, только вместо V надо брать $V_h \equiv V \otimes \mathbb{C}[h]$ и $T(V_h)$ превращается в алгебру над кольцом $\mathbb{C}[h]$!

$$T(V_h) = \mathbb{C}[h] \oplus V_h \oplus V_h^{\otimes 2} \oplus \dots$$

Идеал J_h порождается векторами

$$e^i_j \otimes e^k_s - e^k_s \otimes e^i_j - h(\delta^k_j e^i_s - \delta^i_s e^k_j).$$

Упомянутый в определении изоморфизм α_h зададим на <u>базисных</u> элементах $\mathbb{C}[h]$ модулей $Fun(Mat_n(\mathbb{C})) \otimes \mathbb{C}[h]$ и $U(gl(n)_h)$:

$$t^i_j \xrightarrow{\alpha_h} e^i_j$$

$$t^i_j t^k_s \xrightarrow{\alpha_h} e^i_j e^k_s$$

$$t^i_j < t^k_s \Leftrightarrow \begin{cases} i<k & \text{или} \\ i=k \\ j<s \end{cases}$$

$\vdots$

<u>$(ij) \leq (ks)$</u>

$$t^{i_1}_{j_1} t^{i_2}_{j_2} \dots t^{i_k}_{j_k} \xrightarrow{\alpha_h} e^{i_1}_{j_1} \dots e^{i_k}_{j_k}.$$

$$(i_1 j_1) < (i_2 j_2) < \dots < (i_k j_k)$$

Рассмотрим пример $gl(2)$.

$$T=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \qquad \{a,b\}_{PL}=b \qquad \{b,c\}_{PL}=a-d$$

$$\{a,c\}_{PL}=-c \qquad \{b,d\}_{PL}=b$$

$$\{a,d\}_{PL}=0 \qquad \{c,d\}_{PL}=-c$$

Базис $gl(2)_h$ обозначим "шляпками", чтобы отличать от коммутативных линейных функций a, b, c, d на $Mat_2(\mathbb{C})$.

$gl(2)_h$:

$$[\hat a,\hat b]=h\hat b \qquad [\hat b,\hat c]=h(\hat a-\hat d)$$

$$[\hat a,\hat c]=-h\hat c \qquad [\hat b,\hat d]=h\hat b$$

$$[\hat a,\hat d]=0 \qquad [\hat c,\hat d]=-h\hat c.$$

Изоморфизм α_h:

$a\to\hat a$	$a^2\to\hat a^2$	
$b\to\hat b$	$ab=ba\to\hat a\hat b$	
$c\to\hat c$	$ac=ca\to\hat a\hat c$	......
$d\to\hat d$	$ad=da\to\hat a\hat d$	
	$b^2\to\hat b^2.$	
	......	

Введем новое умножение в $Fun(Mat_2(\mathbb{C}))$:

$$a*b=\alpha_h^{-1}(\alpha_h(a)\circ\alpha_h(b))=\alpha_h^{-1}(\hat a\cdot\hat b)=a\cdot b$$

$$b*a=\alpha_h^{-1}(\alpha_h(b)\circ\alpha_h(a))=\alpha_h^{-1}(\hat b\cdot\hat a)=$$

$$=\alpha_h^{-1}(\hat a\cdot\hat b-h\hat b)=a\cdot b-hb$$

Мы видим, что $a*b \neq b*a$.

Квазиклассический предел:

$$\frac{a*b-b*a}{h}=\frac{hb}{h}=b=\{a,b\}_{PL}$$

Рассмотрим ещё пример:

$$\underline{(ac)*(bc)}=\alpha_h^{-1}(\alpha_h(ac)\circ\alpha_h(bc))=\alpha_h^{-1}(\hat a\underline{\hat c\hat b}\hat c)=$$

$$=\alpha_h^{-1}(\hat a\hat b\hat c^2-h\hat a(\hat a-\hat d)\hat c)=\alpha_h^{-1}(\hat a\hat b\hat c^2-h\hat a^2\hat c+h\hat a\underline{\hat d\hat c})=$$

$$=\alpha_h^{-1}(\hat a\hat b\hat c^2-h\hat a^2\hat c+h\hat a\hat c\hat d+h^2\hat a\hat c)=$$

$$=\underline{abc^2-ha^2c+hacd+h^2ac}$$

$$\underline{\underline{bc*ac}}=\alpha_h^{-1}(\hat b\hat c\hat a\hat c)=\alpha_h^{-1}(\hat a\hat b\hat c^2)=\underline{\underline{abc^2}}$$

$$\frac{(ac)*(bc)-(bc)*(ac)}{h}=acd-a^2c+hac\xrightarrow{h\to 0}$$

$$\to acd-a^2c=\{ac,bc\}_{PL}$$

В общем случае $gl(n)$ легко видеть,

$$\underset{i_1j_1<i_2j_2}{t^{i_1}_{j_1}*t^{i_2}_{j_2}}=t^{i_1}_{j_1}t^{i_2}_{j_2}$$

$$t^{i_2}_{j_2}*t^{i_1}_{j_1}=\alpha_h^{-1}\left(\hat t^{i_1}_{j_1}\hat t^{i_2}_{j_2}+h\left(\delta^{i_1}_{j_2}\hat t^{i_2}_{j_1}-\delta^{i_2}_{j_1}\hat t^{i_1}_{j_2}\right)\right)=$$

$$=t^{i_1}_{j_1}t^{i_2}_{j_2}+h\left(\delta^{i_1}_{j_2}t^{i_2}_{j_1}-\delta^{i_2}_{j_1}t^{i_1}_{j_2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{T_1 * T_2 - T_2 * T_1}{h} = P_{12} T_1 - T_1 P_{12} = \{T_1, T_2\}_{PL}.$$

$\underline{\mathrm{II}}^{(9)}$ Квантование скобки Склянина.

Квантованием алгебры функций на $Mat_N(\mathbb{C})$ со скобкой Склянина является ассоциативная алгебра с генераторами $\hat{t}^i_j$, $1 \le i, j \le N$, на которые наложены квадратичные перестановочные соотношения:

$$R^{i_1 i_2}_{a_1 a_2} \hat{t}^{a_1}_{j_1} \circ \hat{t}^{a_2}_{j_2} = \hat{t}^{i_1}_{a_1} \circ t^{i_2}_{a_2} R^{a_1 a_2}_{j_1 j_2}$$

или $R_{12} \hat{T}_1 \hat{T}_2 = \hat{T}_1 \hat{T}_2 R_{12}$,

где Гекковская R-матрица связана с классической r-матрицей в скобке Склянина $\{T_1, T_2\}_{SK} = [T_1 T_2, r_{12}]$

соотношением $R_{12} \equiv P_{12} R_{12} = \mathbb{1} + h r_{12} + o(h)$

$$R^2 = \mathbb{1} + (q - \tfrac{1}{q}) R \; : \; q = e^h.$$

$\boxed{3}$ Здесь уже требуется $\mathbb{C}[[h]]$ в силу $\underline{q = e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}}$

Проверка "квазиклассического предела" на уровне генераторов

Не требует явного построения изоморфизма α_h. Достаточно знать, что

$$T_1 * T_2 = T_1 T_2 + h(\ldots).$$

Перепишем RFT соотношения через R-матрицу:

$$R_{12}\hat{T}_1\hat{T}_2 = \hat{T}_1\hat{T}_2 R_{12} \Rightarrow R_{12}\hat{T}_1\hat{T}_2 = \hat{T}_2\hat{T}_1 R_{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbb{1} + h r_{12} + o(h))\, T_1 * T_2 = T_2 * T_1 (\mathbb{1} + h r_{12} + o(h))$$

$$\Downarrow$$

$$T_1 * T_2 - T_2 * T_1 = h(T_2 T_1 r_{12} - r_{12} T_1 T_2) + o(h)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{T_1 * T_2 - T_2 * T_1}{h} = [T_1 T_2, r_{12}] + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\to 0,\ h\to 0} \xrightarrow{h \to 0} \{T_1, T_2\}_{SK}.$$

III$^{(9)}$ Квантование скобки Семёнова-Тянь-Шанского

Здесь при квантовании получится другая квадратичная алгебра — алгебра уравнения отражений:

$$\boxed{R_{12}\hat{T}_1 R_{12}\hat{T}_1 = T_1 \hat{R}_{12}\hat{T}_1 R_{12}}$$

Если переписать это в терминах $R = PR$, то получим:

$$R_{21}\hat{T}_2 R_{12}\hat{T}_1 = \hat{T}_1 R_{21}\hat{T}_2 R_{12}.$$

Убедитесь самостоятельно, что на уровне генераторов выполнен квазиклассический предел:

$$\frac{T_1 * T_2 - T_2 * T_1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \{T_1, T_2\}_{STS}.$$

~~Алгебры~~ Алгебры $U(gl(n)_h)$, RTT и алгебра уравнения отражений — примеры квантовых матричных алгебр.

Эти алгебры обладают еще дополнительной структурой — структурой ~~...~~ КО-алгебры (и алгебры Хопфа), которая очень важна для построения теории представлений. Дальше мы введем основные понятия алгебры Хопфа и перейдем к рассмотрению алгебраической структуры (коммутативных подалгебр и центра) кв. матричных алгебр и их представлений.