Задачи по теме "Структуры алгебры Хопфа".

1. Пусть $\mathbb{C}[G]$ — групповая алгебра конечной группы $|G| = N$, $\sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}$ — групповые элементы, σ_0 — единичный элемент G.

$A = \mathbb{C}[G]$ — имеет базис из N векторов $\{\sigma_i\}_{0 \le i \le N-1}$ и $\forall v \in A$:

$$v = \sum_{k=0}^{N-1} v_k \sigma_k .$$

Умножение векторов индуцируется групповым умножением базисных элементов σ_i

(a) Докажите, что отображения

$\Delta(\sigma_i) = \sigma_i \otimes \sigma_i$

$\varepsilon(\sigma_i) = 1$

$S(\sigma_i) = \sigma_i^{-1}$

при их линейном продолжении на $\mathbb{C}[G]$, т.е. $\Delta(v) = \sum_k v_k \Delta(\sigma_k)$ и т.п.

являются антиподом (S), коединицей (ε) и коумножением (Δ), т.е. проверьте все аксиомы алгебры Хопфа.

(б)* Постройте дуальную алгебру Хопфа A^* и покажите, что это алгебра функций на группе G, линейно продолженных на $\mathbb{C}[G]$ по правилу:

$$\forall f \in Fun(G) \longleftrightarrow \tilde{f} \in Fun(\mathbb{C}[G]):$$

$$\tilde{f}\left(\sum_k c_k g_k\right) \stackrel{def}{=} \sum_k c_k f(g_k).$$

Постройте явный вид Δ^*, ε^* и S^* на функциях из $Fun(\mathbb{C}[G])$.

---

(2) Пусть $U(g)$ – универсальная обёртывающая алгебра ~~g~~ алгебры Ли g (конечномерной).

(а) Докажите, что отображение

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1_U + 1_U \otimes e_i$$

$$\varepsilon(e_i) = 0 \qquad \varepsilon(1_U) = 1$$

$$S(e_i) = -e_i$$

являются коумножением (Δ), коединицей (ε) и антиподом (S), т.е. проверьте (анти)гомоморфность и все аксиомы алгебры Хопфа.

(б) Для заданного представления $\mathfrak{g}$ (а ⇒ и $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$) $T_V : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ постройте <u>явный вид</u> $Q_{\mathrm{End}(V)}$, которое реализует представление $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^*$, то есть, для $\forall F \in \mathrm{End}(V)$ найдите

$$Q_{\mathrm{End}(V)}(a) \triangleright F \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

---

3. Пользуясь определением дуальной алгебры Хопфа A^* к алгебре Хопфа A докажите:

(а) Отображение Δ^* - гомоморфизм $A^* \to A^* \otimes A^*$ относительно умножения $m^*(\xi, \eta) \equiv \xi * \eta$:

$$\Delta^*(\xi * \eta) = \Delta^*(\xi) * \Delta^*(\eta)$$

(б) Антигомоморфизм S^* и гомоморфизм Δ^* удовлетворяют тождеству

$$m^* \circ (id \otimes S^*) \circ \Delta^* = m^* \circ (S^* \otimes id) \circ \Delta^* =$$
$$= \eta^* \circ \varepsilon^*$$

Единица в A^*.