# 9. Классическое определение вероятности

Рассмотрим эксперимент, имеющий $m$ равновозможных исходов, например бросание игральной кости, вытаскивание карты из колоды и т. д. Если интересующее нас событие (например, выпадение шестёрки, вытаскивание туза и т. д.) происходит в $a$ из этих исходов, то *вероятность* события считают равной $p = a/m$.

Это пояснение полезно для начинающего, но не является математическим определением. Вот математическое определение.

*Вероятностью* подмножества $A$ конечного множества $M$ называется число

$$P(A) = P_M(A) := |A|/|M|.$$

Далее, если не оговорено противное, множество $M$ фиксировано и пропускается из обозначений. Тогда вероятность определена для всех его подмножеств. Их часто называют *событиями*.

**9.1.** Из колоды в 52 карты вытаскивается одна карта. Найдите вероятность того, что она окажется

(a) чёрной масти; (b) тузом; (c) картинкой;

(d) дамой пик; (e) королём или бубной.

Например, в задаче 9.1 (c) множество $M$ («всех возможных исходов») совпадает с множеством карт в колоде, а множество $A$ («исходов, в которых происходит рассматриваемое событие») — с множеством картинок. Так эта и многие другие вероятностные задачи могут быть строго сформулированы на комбинаторном языке.

**9.2.** Монета бросается 3 раза. Найдите вероятность выпадения

(a) трёх орлов; (b) двух орлов и решки.

**9.3.** Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных костей

(a) на первой выпадет больше очков, чем на второй;

(b) сумма выпавших очков составит $2, 3, \ldots, 12$.

**9.4.** Найдите вероятность того, что случайное целое число от 1 до 105

(a) делится на 5; (b) делится на 7; (c) делится на 35.

(a′, b′, c′) То же для случайного целого числа от 1 до 100.

**9.5.** Федя знает ответы на 10 вопросов из 30. Билет состоит из двух вопросов. С какой вероятностью Федя ответит на оба вопроса?

Для решения некоторых из вышеприведённых задач полезны следующие.

**9.6.** (a) **Правило сложения.** Пусть $A \cap B = \emptyset$. Выразите $P(A \cup B)$ через $P(A)$ и $P(B)$.

(b) Выразите вероятность $P(A \cup B)$ через $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$.

(c) **Правило умножения.** Выразите вероятность $P_{M\times N}(A\times B)$ через $P_M(A)$ и $P_N(B)$.

*Комментарий*: $P_M(A) = P_{M\times N}(A \times N)$ и $P_N(B) = P_{M\times N}(M \times B)$.

**9.7.** (a) В ящике лежат красные и чёрные носки. Какое минимальное количество носков может быть в ящике, если вероятность того, что два случайно вытянутых носка красные, равна $1/2$?

(b) То же, если дополнительно известно, что число чёрных носков чётно.

**9.8.*** (a) С какой вероятностью треугольник, образованный тремя случайными вершинами правильного $2n$-угольника, будет прямоугольным; остроугольным; тупоугольным?

(Если эта задача не получается, то см. следующий семинар.)

(b) Найдите пределы полученных вероятностей при $n \to \infty$. (Подумайте о смысле полученных результатов.)