12. Математическое ожидание и дисперсия.

Пусть дано конечное или счётное множество M и для каждого элемента $m \in M$ задано число (вероятность) $P(m) \geq 0$, причем $\sum\limits_{m \in M} P(m) = 1$. Числовая функция X, заданная на M, называется *случайной величиной*. Множество пар $(x_i, p_i), i = 1, 2, \ldots$, где $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — множество возможных значений случайной величины X, а $p_i = P(\{m \in M \colon X(m) = x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots,$ — соответствующие им вероятности, называется *распределением* случайной величины X. Событие $\{m \in M \colon X(m) = x_i\}$ в дальнейшем сокращённо обозначается $X = x_i$.

12.1. Монета подбрасывается 5 раз. Найдите распределение числа выпавших орлов.

12.2. (a) Вам предлагается такая игра. Вы платите 2 конфеты, затем бросается игральная кость, и вы получаете столько конфет, сколько очков выпадает. Выгодна ли вам эта игра?

(b) Правила те же, только в случае выпадения 1 очка вы платите 100 конфет. (У вас достаточно конфет, чтобы заплатить.) Выгодна ли вам эта игра?

(c) Банк предлагает вам стабильный доход совершенно бесплатно. Вы кладете в банк 8 конфет, после чего бросается игральная кость. Если выпадает 2, 3 или 4 очка, то вы получаете назад свой вклад плюс еще 1 конфету вдобавок. Если выпадает 5 или 6 очков ("рост рынка"), то вы получите даже плюс 2 конфеты вдобавок. А если выпадет 1 очко, то это "кризис", и вы теряете весь свой вклад. Выгодна ли вам эта игра?

Математическим ожиданием или *средним значением* случайной величины X называется сумма

$$E(X) = \sum x_i p_i = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots.$$

12.3. (a) Докажите, что математическое ожидание случайной величины X, заданной на множестве M, равно $\sum\limits_{m \in M} X(m)P(m)$.

(b) Докажите, что если $E(X) \leq x$, то существует $m \in M \colon X(m) \leq x$.

(c) Пусть случайная величина X при всех $m \in M$ принимает одно и то же значение μ: $X(m) = \mu$. Найдите $E(X)$.

(d) Выразите $E(aX + bY)$, где a, b — вещественные числа, а X, Y — случайные величины, через a, b, $E(X)$, $E(Y)$.

(e) Можно ли выразить $E(XY)$ через $E(X)$ и $E(Y)$?

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если события $X = x_i$ и $Y = y_j$ независимы при любых x_i, y_j, т. е.

$$P(\{m \in M \colon X(m) = x_i \text{ и } Y(m) = y_j\}) = P(X = x_i)P(Y = y_i).$$

12.4. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то математическое ожидание их произведения равно произведению их математических ожиданий: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Дисперсией случайной величины X называется число $D(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$.

12.5. Докажите, что $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

12.6. Докажите, что если X и Y независимы, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

12.7. Неравенство Чебышёва. Докажите, что для любой случайной величины X и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2.$$

12.8. Федя знает ответы на 20 из 30 вопросов. В билет входят 3 вопроса. Найдите распределение числа вопросов, на которые Федя сможет ответить.

12.9. Две одинаковые колоды карт перетасовываются, и карты последовательно парами выкладываются на стол. Найдите среднее значение числа пар, карты в которых совпадают.

12.10. В задаче 12.8 найдите среднее значение Фединой оценки (если Федя ответит на 3 вопроса, он получит 5, на 2 — 4 и т. д.).

12.11. В ряд в случайном порядке выписаны m единиц и n нулей. Найдите среднее число серий из k одинаковых цифр подряд.

12.12. Из колоды в 52 карты вынимаются карты до первого туза. Сколько карт в среднем будет вынуто?