

## 10. Более общее определение вероятности

**10.1.** (а) Один стрелок попадает в цель с вероятностью 0,8, другой — 0,7. Найдите вероятность поражения цели, если оба стреляют одновременно.

(б) Рабочий обслуживает три станка. Вероятности их остановки равны соответственно 0,1; 0,2; 0,15. Найдите вероятность безотказной работы всех станков.

Для формализации вышеприведённых задач необходимо следующее более общее определение. Пусть задано множество  $M$  и каждому  $m \in M$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $P(m)$ , причём сумма всех этих чисел равна 1. Тогда *вероятностью* события  $A$  называется сумма чисел  $P(m)$  по всем  $m \in A$ .

Например, в вышеприведённой задаче разумно считать, что множество  $M$  состоит из четырёх элементов: оба стрелка попали, первый попал и второй промахнулся, первый промахнулся и второй попал, оба промахнулись.

**10.2.** Сформулируйте и докажите аналоги правил суммы и произведения для вышеприведённого обобщения.

Приведённое определение можно обобщить на случай бесконечного множества  $M$ . (В этом случае для всех  $m \in M$ , кроме счётного числа,  $P(m) = 0$ .) Ещё более интересно следующее обобщение.

**10.3.** Найдите вероятность того, что случайная точка правильного треугольника лежит

- (а) в треугольнике, образованном средними линиями;
- (б) во вписанном круге.

Пусть  $A \subset M$  — подмножество прямой (или плоскости, или пространства), имеющие длину. Не все подмножества имеют длину (или площадь или объём). Тогда *вероятностью* подмножества  $A$  в  $M$  называется число

$$P(A) = P_M(A) := L(A)/L(M),$$

где  $L(A), L(M)$  — длины подмножеств.

Пусть  $A \subset M$  — подмножество плоскости (или пространства), имеющие площадь. Тогда *вероятностью* подмножества  $A$  в  $M$  называется

$$P(A) = P_M(A) := S(A)/S(M),$$

где  $S(A), S(M)$  — площади подмножеств. Аналогично определяется вероятность для подмножеств  $A \subset M$  пространства, имеющих объёмы.

**10.4.\*** Сформулируйте и докажите аналоги правил суммы и произведения для вышеопределенных «геометрических» вероятностей.

**10.5.\*** (а) Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти 5 минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

(б) Стержень случайным образом ломают на три части. С какой вероятностью из этих частей можно составить треугольник?

(с) Найдите вероятность того, что случайный треугольник является остроугольным.

(д) С какой вероятностью случайная хорда в круге длиннее стороны вписанного в этот круг правильного треугольника?

Парадоксально, что у каждого из пунктов (с) и (д) имеются разные естественные формулировки, дающие разный ответ!