11. Независимость и условная вероятность

Подмножества (т. е. события) A и $B \neq \emptyset$ конечного множества M *независимы*, если доля (т. е. вероятность) множества $A \cap B$ в B равна доле (т. е. вероятности) множества A в M. Приведём симметричную переформулировку, которая работает и для $B = \emptyset$. Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

11.1. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

(a) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Подмножества $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

11.2. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

(a) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

(b) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

(c) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(d) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

11.3. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда B и A независимы.

11.4. Два дворянина из свиты короля в ожидании выхода его Величества решили сыграть в кости. Они сделали одинаковые ставки и договорились, что тот, кто первым выиграет 10 партий, получает все деньги. При счёте 9:8 появился король и игру пришлось закончить. Как следует поделить деньги?

Условной вероятностью подмножества A при условии подмножества B, для которого $P(B) \neq 0$, называется отношение

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Ясно, что независимость подмножеств A и B равносильна тому, что $P(A|B) = P(A)$.

11.5. (a) Известно, что при броске игральной кости выпало чётное число. Найдите вероятность того, что оно меньше 5.

(b) В семье два ребёнка. Известно, что один из них мальчик. Найдите вероятность того, что второй ребёнок тоже мальчик. (Мы предполагаем, что вероятности рождения мальчика и девочки равны половине и что пол второго ребёнка не зависит от пола первого.)

11.6. Лампочки выпускаются двумя заводами, причём первый из них производит 70 % всей продукции. Лампочки, произведённые первым заводом, горят с вероятностью 0,98, вторым — 0,95. Найдите вероятность того, что купленная лампочка горит.

11.7. Формула полной вероятности. Если $M = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$ и $P(B_j) \neq 0$ (говорят, что $B_1, \ldots, B_n$ — *полная система событий*), то

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n).$$

11.8. Отец, мать и сын увлекаются шахматами. Отец обещает сыну приз, если он выиграет две партии подряд из трёх, сыгранных поочерёдно с отцом и матерью. Сын знает, что отец играет лучше матери. С кем ему выгоднее играть первую партию?

11.9. Лампочки выпускаются двумя заводами, причём первый из них производит 70 % всей продукции. Лампочки, произведённые первым заводом, горят с вероятностью 0,98, вторым — 0,95. Купленная лампочка оказалась бракованной. Найдите вероятность того, что она выпущена первым заводом.

11.10. Формула Байеса. Справедливо равенство $P(B|A) = P(A|B)P(B)/P(A)$.

11.11. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,04. Если изделие бракованное, то оно пройдёт тест с вероятностью 0,05, а иначе — с вероятностью 0,98. Найдите (с точностью до 0,0001) вероятность того, что изделие, дважды выдержавшее тест, бракованное.

11.12.* Разборчивая невеста. (Загадка.) Девушка выбирает себе жениха из n претендентов, поочерёдно делающих ей предложение. Каждое предложение она может принять (тогда всё заканчивается) или отвергнуть (отвергнутый претендент с повторным предложением не обращается). Она хочет действовать так, чтобы вероятность выбрать наиболее достойного жениха была наибольшей.

(a) Докажите, что оптимальная стратегия имеет следующий вид: отвергнуть первые $s(n)$ предложений, а затем принять первое предложение от претендента, превосходящего всех предыдущих.

(b) Определите оптимальное значение $s(n)$.