

13. Испытания Бернулли

Испытаниями Бернулли называется последовательность n независимых случайных величин, каждая из которых принимает два значения: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Обычно появление 1 называют *успехом*, а 0 — *неудачей*.

Приведём другое определение испытаний Бернулли. Пусть M — множество n -мерных векторов, все координаты которых равны 0 или 1, и для каждого $x \in M$ задана вероятность $P(x) = \prod_{i=1}^n p_i$, где $p_i = p$, если $x_i = 1$, и $p_i = q = 1 - p$, если $x_i = 0$. Элементы множества M тоже назовём *испытаниями Бернулли*.

Комментарий. Оба определения являются эквивалентными в следующем смысле. Очевидно, что определённые на множестве M случайные величины x_i независимы и каждая из них принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q . Поэтому каждый вектор $x \in M$ можно рассматривать как набор значений n независимых случайных величин x_i .

Случайная величина $X = \sum x_i$ называется *числом успехов*.

13.1. В n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p найдите

- (a) вероятность ровно k успехов;
- (b) среднее значение числа успехов;
- (c) дисперсию числа успехов;
- (d) наиболее вероятное значение числа успехов.

13.2. Закон больших чисел. Пусть X — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p . Пусть $t > 0$. Докажите, что

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

Указание. Примените неравенство Чебышёва.

13.3. Пассажиру купейного вагона удобно, если все его попутчики одного с ним пола. Какая часть пассажиров испытывает удобства?

13.4. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найдите вероятность того, что среди 6 детей не более 2 девочек.

13.5. Кооператив отгружает железные балки. Средняя длина балки 3 м, дисперсия $0,09 \text{ м}^2$. Сколько балок надо заказать, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,999, хотя бы 1000 из них имели длину не менее 2 м?

13.6. Найдите среднее число испытаний до первого успеха, если вероятность успеха равна p .

13.7. Проводятся независимые испытания с вероятностью успеха 0,8. Испытания проводятся до первого успеха, но не более четырёх раз. Найдите среднее число испытаний.

13.8. (Загадка.) Старик ловил неводом рыбу ровно тридцать лет и три года. Каждый день он ловил ровно 7 рыб, которых как раз хватало на ужин. Живущий у старухи кот-долгожитель ест только макрель, которая ловится вдвое реже остальных рыб. В результате он 700 раз оставался голодным. Плавает ли макрель в море косяками или поодиночке?

Комментарий. Конечно, точно ответить на поставленный вопрос невозможно. Однако можно оценить, какая из двух гипотез лучше согласуется с данными.