

## 14\*. Подсчёты в графах

**14.1.** Назовём человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовём человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

**14.2.** На вечеринку пришли 10 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, …, 9 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

**14.3.** В каждой из трёх школ учится по  $n$  человек. Любой ученик имеет в сумме ровно  $n + 1$  знакомых учеников из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы все трое выбранных учеников были знакомы друг с другом.

**14.4.** Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспересадочными) авиалиниями. Города, соединённые авиалинией, называются *смежными*. Может ли в этой стране быть ровно 100 авиалиний, если для любых двух смежных городов есть ровно

- а) один город, смежный с ними обоими;
- б) два города, смежные с ними обоими.

**14.5.** На предприятии трудятся 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчинённых равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издаёт приказ и выдаёт копию этого приказа каждому своему непосредственному подчинённому (если такие есть). Далее, каждый день работник берёт все полученные им в предыдущие дни приказы и либо раздаёт их копии всем своим непосредственным подчинённым, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по предприятию не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.