

Листок 7.
Геометрия унитарных пространств

Задача 1. Пусть P – эрмитова матрица. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
а) $P > 0$, то есть $x^*Px > 0$, если $x \neq 0$;
б) $P = B^*B$ для некоторой невырожденной матрицы B ;
в) все собственные значения матрицы P положительны.

Задача 2. Пусть A – комплексная $(n \times k)$ -матрица. Докажите, что матрицы A, A^*, A^*A, AA^* имеют одинаковый ранг.

Задача 3. Пусть λ – наименьшее, а μ – наибольшее собственное значение эрмитовой матрицы $A = (a_{ij})$. Докажите, что все ее диагональные элементы a_{ii} удовлетворяют неравенству $\lambda \leq a_{ii} \leq \mu$.

Задача 4. Докажите, что перестановочные операторы A и B в унитарном пространстве могут быть одновременно записаны верхне-треугольными матрицами в некотором ортонормированном базисе.

Задача 5. Две комплексные квадратные матрицы A и B называются унитарно эквивалентными, если существует такая унитарная матрица U , что $B = U^{-1}AU$. Всякая ли комплексная квадратная матрица унитарно эквивалентна своей жордановой нормальной форме?

Задача 6. Пусть A – невырожденная комплексная квадратная матрица. Докажите единственность полярных разложений вида $A = UP$ и $A = PU$, где U – унитарная матрица, а P – положительная эрмитова матрица P .

Задача 7. Пусть A и B – две комплексные $(n \times n)$ -матрицы. Докажите эквивалентность следующих двух условий:

- а) $B = UA$ для некоторой унитарной матрицы U ;
- б) $A^*A = B^*B$.

Задача 8. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n}$, снабженное канонической евклидовой структурой $g(u, v) = u^t v$, u, v – вектор-столбцы в $\mathbb{R}^{2n}$, и канонической симплектической структурой $\omega(u, v) = u^t J_n v$, где $J_n = \begin{pmatrix} O & -E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}$. Отождествим $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$, сопоставив вещественный вектор-столбец $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)^t$ комплексному вектор-столбцу $(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)^t$. При этом отождествлении отображение $X + iY \mapsto \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ осуществляет вложение τ группы $GL(n, \mathbb{C})$ в группу $GL(2n, \mathbb{R})$.

Докажите, что $H(u, v) = g(u, v) + ig(u, J_n v)$ есть эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Выведите отсюда, что $\tau(U(n)) = O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) = \tau(GL(n, \mathbb{C})) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) = \tau(GL(n, \mathbb{C})) \cap O(2n)$, где $U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid A^*A = E_n\}$ – унитарная группа, $O(2n) = \{A \in M(2n, \mathbb{R}) \mid A^t A = E_{2n}\}$ – ортогональная группа, а $Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in M(2n, \mathbb{R}) \mid A^t J_{2n} A = J_{2n}\}$ – симплектическая группа.

Задача 9. Докажите, что всякая симплектическая матрица $A \in Sp(2n)$ обладает следующими свойствами:

- а) $\det A = 1$;
- б) характеристический многочлен $f(t)$ матрицы A является возвратным, то есть $f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t^{2n}} f(t)$.

Задача 10. В пространстве $\mathbb{R}^4$ со стандартным базисом $e_1, \dots, e_4$ и стандартной евклидовой структурой $g(\cdot, \cdot)$ рассмотрим линейные операторы I, J, K , определяемые следующим действием на базисные векторы e_i : $I(e_1) = e_2, I(e_2) = -e_1, I(e_3) = e_4, I(e_4) = -e_3, J(e_1) = e_3, J(e_3) = -e_1, J(e_2) = -e_4, J(e_4) = e_2, K(e_1) = e_4, K(e_4) = -e_1, K(e_3) = -e_2, K(e_2) = e_3$. Из этого определения следует, что операторы I, J, K являются операторами комплексной структуры на $\mathbb{R}^4$, согласованными с евклидовой структурой g , то есть, например, $I^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^4}$ и $g(Ix, e) = g(x, y)$, и т.д.

- а) Докажите, что множество операторов

$$M = \{A = xI + yJ + zK \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

содержится в множестве $\overline{M}$ всех операторов комплексной структуры на $\mathbb{R}^4$, согласованных с евклидовой структурой g , и укажите $\mathbb{R}$ -линейный изоморфизм $\mathbb{R}^4$ с телом кватернионов $\mathbb{H}$, при котором операторы из M переходят в операторы умножения на кватернионы.

- б)* Совпадает ли M с множеством $\overline{M}$?