Логика и алгоритмы весна 2018.
Задачи для семинара N 4.

Рассмотрим сигнатуру с равенством, двумя двуместными функциональными символами $+, \cdot$ и константами 0 и 1. Определимые подмножества стандартной модели данной сигнатуры $(\mathbb{N}, =_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}})$ называются *арифметическими.*

1. Пусть A и B — арифметические множества. Что можно сказать о $A \cup B$, $A \cap B$, $\mathbb{N} \setminus A$, $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.

2. Докажите, что следующие множества арифметичны:

   (a) Любое конечное или множество или его дополнение.

   (b) Множество натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию.

   (c) Множество простых чисел.

   (d) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   (e) $\{4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3. Даны две теории T, S в сигнатуре L, такие что теория $T \cup S$ противоречива. Докажите, что найдется замкнутая формула φ, такая что $T \vDash \varphi$ и $S \vDash \neg\varphi$.

4. Докажите, что следующие теории не являются счетно категоричными:

   (a) $Th(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, =_{\mathbb{N}})$;

   (b) $Th(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, =_{\mathbb{Z}})$;

   (c) $Th(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, =_{\mathbb{Z}})$.

5. теории называются *эквивалентными*, если их множества теорем совпадают. Сколько попарно не эквивалентных полных расширений имеет теория плотных линейных порядков в сигнатуре $\{<, =\}$?

6. Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична в мощности континуум.

7. В сигнатуре $\{R, =\}$, где R — 2-местный предикатный символ, рассмотрим теорию отношений эквивалентности с бесконечным количеством классов, каждый из которых бесконечен.

   (a) Запишите аксиомы этой теории.

   (b) Докажите, что эта теория не является конечно аксиоматизируемой.

   (c) Докажите полноту этой теории.

8. *Спектром* формулы A назовём множество $\{n \in \mathbb{N} \mid A$ имеет модель мощности n, $n > 0\}$.

   (a) Постройте формулу в сигнатуре $\{=\}$, которая имеет спектр $\{2, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$;

   (b) Докажите, что совокупность спектров всех формул (произвольной сигнатуры) замкнута относительно операций пересечения и объединения;

   (c) Существует ли формула, спектр которой есть множество всех чётных чисел?

   (d) Существует ли такая формула в сигнатуре $\{=\}$?

9. (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x\, A(x)$, где A — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \ldots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$. *Указание.* Рассуждайте от противного и воспользуйтесь теоремой о компактности.

10. Применив теорему о компактности докажите, что любой частичный порядок можно дополнить до линейного.

11. Применив теорему о компактности докажите, что если данным конечным набором типов плиток можно замостить сколько угодно большой квадрат, то можно замостить и всю плоскость. Плитки считать квадратными с разноцветными сторонами. Прикладывать плитки можно только если совпадают цвета.

12. Применив теорему о компактности докажите, что для бесконечных графов двудольность эквивалентна отсутствию нечетных простых циклов.

13. Докажите, что не существует теории в сигнатуре PA, модели которой — в точности поля конечной характеристики.

14. Докажите, что не существует теории в сигнатуре групп. модели которой — в точности циклические группы.