Лекция 1

Пусть (X, d) — метрическое пространство.

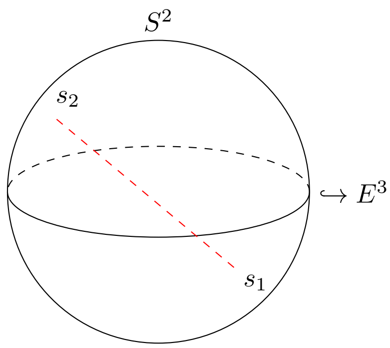
Топология на X определяется метрикой. В этой топологии X связно, хаусдорфово, локально компактно.

Определение 1.1. *Путь* — это непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \to X$.

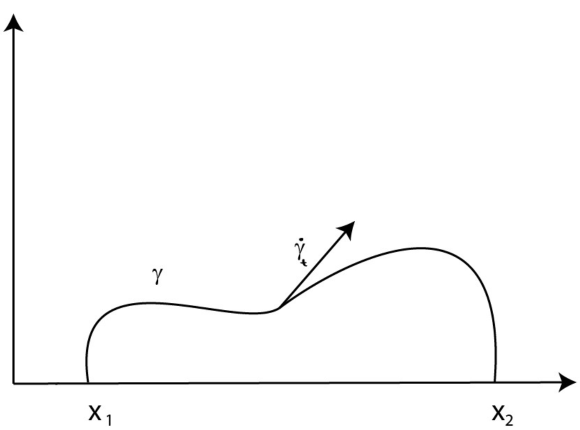
Определение 1.2. *Длина пути* γ — это значение функции
$l(\gamma) = sup_{\{\text{всевозможные разбиения отрезка}\}} \sum_i d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$.

Определение 1.3. Назовем метрическое пространство *удобным для путешествий*, (*хорошим*), если $d(x_1, x_2) = \inf l(\gamma)$.

Пример 1.1. Сфера с хордовой метрикой $d(s_1, s_2) = |\overline{s_1 s_2}|$ (расстояние между точками равно расстоянию между ними в евклидовом пространстве) — НЕ хорошая.



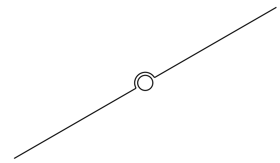
Пример 1.2. Рассмотрим евклидову плоскость. Пусть γ — гладкий путь. Тогда
$l(\gamma) = \int\limits_0^1 \sqrt{\dot{\varphi_t}^2 + \dot{\psi_t}^2} \geq \int\limits_0^1 \sqrt{\dot{\varphi}^2} \geq \int\limits_0^1 |\dot{\varphi}| dt \geq |\int\limits_0^1 \dot{\varphi} dt| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = |x_2 - x_1|$. Таким образом, E^2 — хорошее.



Через X будем в дальнейшем обозначать хорошее метрическое пространство.

Определение 1.4. *Отрезок* (*геодезический отрезок*) — это отображение $\gamma : [a, b] \to X, \gamma(a) = x_1, \gamma(b) = x_2, l(\gamma) = d(x_1, x_2)$.

Пример 1.3. Плоскость без точки — хорошее пространство, но не полное $\Rightarrow$ нет отрезка между точками.



Задача 1.1. Из того, что $[\gamma(a),\gamma(b)]$ — отрезок, следует, что $[\gamma(a),\gamma(t)]$ — отрезок для всех $a \le t \le b$.

Теорема 1.1. (*Хопф-Ринов*)

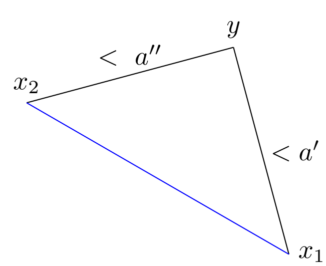
- Хорошее пространство X является полным и локально компактным тогда и только тогда, когда любой шар $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ компактен в X.
- Если хорошее пространство X является полным и локально компактным, то любые две точки $x_1, x_2 \in X$ можно соединить отрезком.

Доказательство: Пусть $U = \{r \in \mathbb{R}_+, \overline{B(x_0, r)}$ – компактен$\}$ Тогда:

(1) U непусто (из локальной компактности).
(2) $r \in U \Rightarrow (r' < r) \Rightarrow (r' \in U)$.

Рассмотрим $\sup(U)$. Если $\sup(U) = \infty$ —победа. Предположим тогда, что $\sup(U) = R < \infty$ и покажем, что это невозможно:
$\star$ $\overline{B(x_0, R)}$—компактно.

Смешная лемма. $a' + a'' > d(x_1, x_2)$. Тогда $\exists y \in X$: $d(x_1, y) < a', d(x_2, y) < a''$.



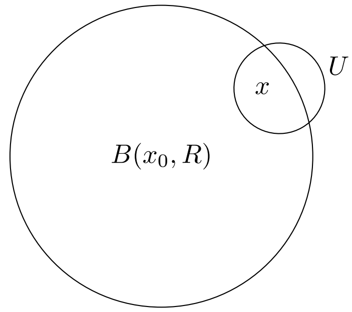
Пусть $\{x_n\} \subset \overline{B(x_0, R)}$, хотим доказать, что из $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Пусть $a' = R - \dfrac{1}{k}$, $a'' = \dfrac{2}{k}, k \in \mathbb{N}$. Тогда $a' + a'' > R$ и мы можем воспользоваться <u>смешной леммой</u>: $d(y_{n,k}, x_0) \le a', d(y_{n,k}, x_n) \le a''$.

Зафиксируем k. Рассмотрим $y_{n,k} \in \overline{B(x_0, R - \frac{1}{k})}$. Этот шар компактен, так как $R - \dfrac{1}{k} < R$. После преобозначений можно считать, что $\{y_{n_k,k}\}$ — сходящаяся подпоследовательность в $\overline{B(x_0, R - \frac{1}{k})}$. Теперь с помощью диагонального приема Кантора выберем последовательность $\{y_{n_j,k}\}$, которая при любом k сходится к x_k.

С помощью $3 - \varepsilon$ трюка докажем, что x_{n_k} — фундаментальная последовательность.

Таким образом, к этому моменту доказано, что $\overline{B(x_0, R)}$ — компактен. Докажем, что $\overline{B(x_0, R + \frac{\varepsilon}{2})}$ — компактен.



Выберем для каждого $x \in \overline{B(x_0, R)}$ такую окрестность U_x, что $\overline{U_x}$ компактно.

Тогда существует конечное покрытие $\overline{B(x_0, R)}$ $U = \bigcup U_\alpha$. Будем использовать факт: если K — компакт, $K \subset U$ — открытое, тогда $\exists K_\varepsilon$ - открытая ε-окрестность K.

В нашей конструкции $\overline{U}$ компактно. Хотим показать, что $\overline{B(x_0, R + \dfrac{\varepsilon}{2})} \subset \ K_\varepsilon$.

Если $x \in \overline{B(x_0, R + \dfrac{\varepsilon}{2})} \Rightarrow d(x_0, x) \leq R + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Заметим теперь, что $R - \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon > R + \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists y : d(x_0, y) < R < \dfrac{\varepsilon}{3} \in B(x_0, R), d(x, y) < \varepsilon$ $\Rightarrow \in B(x_0, R)$, т.е. мы попали в K_ε, значит, и наш шар $\Rightarrow$ его замыкание компактно.

$\square$

Семинар

Задача 1.2. (*Единственная задача первого семинара.*) Найти уравнение цилиндра с образующими параллельными прямой $x = y = z$, описанного вокруг эллипсоида: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = \ 1$.

Краткое решение.

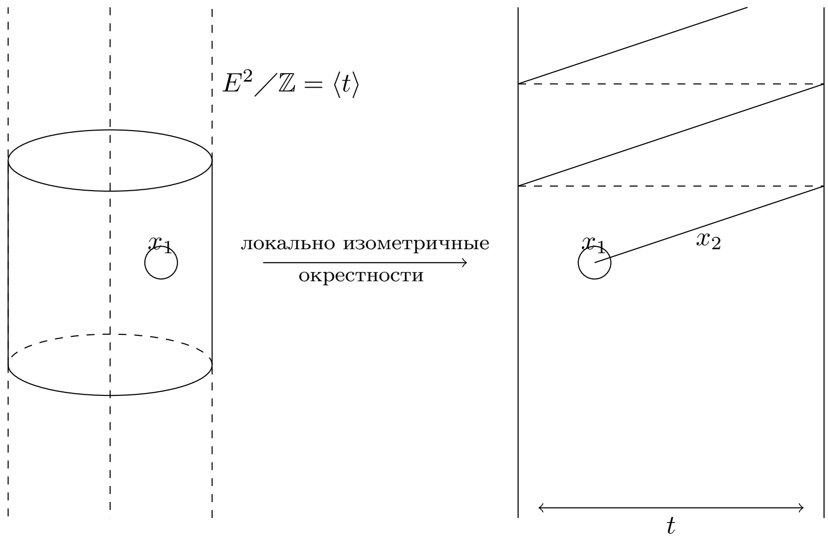
- Рассмотрим направляющий вектор $(1, 1, 1)$. Он должен лежать в касательной полоскости $\Rightarrow$ должен быть перпендикулярен градиенту.
- Тогда $2x + 8y + 18z = 0 \Rightarrow x + 4y + 9z = 0 \Rightarrow (x + 4y + 9z)^2 = 0$.
- Рассмотрим пучок:$\lambda(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1) + \mu(x + 4y + 9z)^2 = 0$. Возьмем квадратичную часть данного выражения и подставим $(1, 1, 1)$. Получаем: $14\lambda + 14^2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda + 14\mu = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = -14$.
- Таким образом, мы восстановили цилиндр — это квадратичная поверхность, содержащая эллипсоид и его стороны параллельны $x = y = z$.

Лекция 2

Определение 2.5. *Геодезическая* γ – путь в X такой, что он локально кратчайший (у каждой точки $x \in X$ существует окрестность U_x, что для части пути, лежащей в U_x верно, что это кратчайшее расстояние между любыми двумя его точками).

Пример 2.4. *(Иллюстрации к понятию геодезическая и термину "локально кратчайший").*

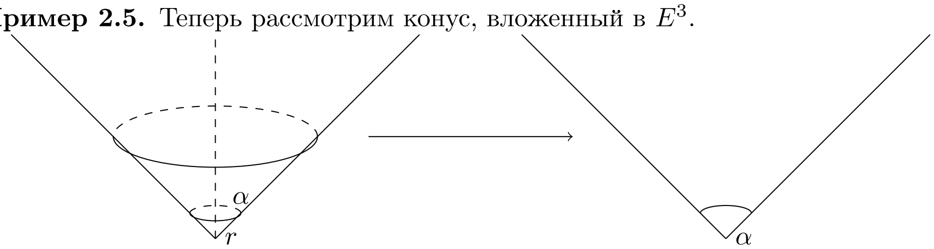
Рассмотрим вложенный в E^3 бесконечный цилиндр и его развертку.



$\langle t \rangle$ – параллельные переносы.

Рассмотрим отрезок, соединяющий x_1 и x_2 в развертке, и бесконечно продолжим его как показано на рисунке. На цилиндре это выглядит как винтовая линия, которая, хоть и остается геодезической, не всегда будет кратчайшей.

Пример 2.5. Теперь рассмотрим конус, вложенный в E^3.



Заметим, что длина окружности с радиусом r и центром в вершине меньше, чем $2\pi r$ $\Rightarrow$ нельзя положить на евклидову плоскость.

Теорема 2.2. X, Y — хорошие, локально компактные, полные, метрические, связные пространства. Отображение $\varphi : X \to Y$, при этом:

- φ - отображение "на".
- $\varphi(x) = y \Rightarrow$ существуют окрестности $X \supset U_x \ni x, Y \supset U_y \ni y$ такие, что $\varphi : U_x \to U_y$ – изометрия.
- Для каждой точки $y \in Y$ существует шар $B(y, r)$ такой, что между любыми двумя его точками только одна кратчайшая.

Тогда φ – накрытие.

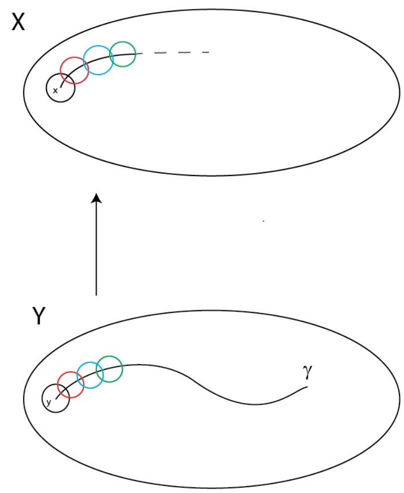
Доказательство: Для доказательства этой теоремы воспользуемся конструкцией изометрического подъема путей (*"делай, пока можешь!"*).

Задача 2.3. В полном прстранстве X процесс продолжается неограниченно.

Задача 2.4. $l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})$.

Задача 2.5. Кратчайшая поднимается в кратчайшую.

Задача 2.6. Проверить, что $\varphi^{-1}(B(y, r)) = \bigcup_{x \in \varphi^{-1}(y)} B(x, r)$. $\square$



Римановы многообразия.

Понятия и обозначения, используемые далее без пояснений: M – гладкое многообразие, T_xM, T_x^*M – касательное и кокасательное пространство в точке $x \in M$ соответственно. Атлас, карта, локальные координаты, векторное поле.

Определение 2.6. *Риманово многообразие* (M, g) – гладкий выбор в касательном пространстве T_xM формы g_x такой, что:

(1) $g_x : (T_xM) \times (T_xM) \to \mathbb{R}$, $g_x(u, v)$ билинейна по u и v.
(2) $g_x(u, u) \geqslant 0$.
(3) $g_x(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Пример 2.6. Пусть у нас есть евклидово скалярное произведение g_x, определенное на карте как

$$g_x = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(x) \end{pmatrix}, \lambda_i(x) > 0$$

Тогда скалярное произведение векторов в этой точке можно посчитать следующим образом. Пусть даны вектора

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\langle u, w \rangle_x = u^T \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(x) \end{pmatrix} w.$$

Семинар

Пусть x_i – координаты. Тогда базисные векторные поля определяются соотношениями $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0, i \neq j$. И любое векторное поле может быть записано в виде: $\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \varphi_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 2.7. Любая метрика на двумерном римановом многообразии записывается как $g_x = A(x)(dx)^2 + 2B(x)dxdy + C(x)(dy)^2$, причем матрица

$$\begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ B(x) & C(x) \end{pmatrix}$$

положительно определена.

Задача 2.7. Даны два вектора $u = (5\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})$, $v = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})$. Найти угол между этими векторами в точке x.

Длина гладкой кривой.

(M, g) — риманово многообразие (=гладкое многообразие+риманова метрика).

Определение 2.7. *Гладкий путь* $\gamma(t)$ — это путь $\gamma(t)\colon [0,1] \to M$, удовлетворяющий следующим условиям: $\gamma(t) \in C^\infty$ и $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ (т.е. функция монотонна, также это условие позволяет параметризовать гладкий путь длиной).

Таким образом, можем определить

$$l(\gamma) := \int_0^1 ||\gamma(t)||dt = \int_0^1 \sqrt{g_x(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt.$$

Если есть кусочно-гладкий путь, можем определить его длину как сумму длин гладких кусков.

Утверждение 2.1. Введем метрику $d(x_1, x_2) = \inf l(\gamma), \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Утверждается, что получим метрическое пространство.

Задача 2.8. Доказать это утверждение (самое сложное — доказать, что $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$).

Теорема 2.3. (M, g) как метрическое пространство с метрикой $d = \inf l(\gamma)$ является хорошим, а его топология как метрического пространства совпадает с топологией M.

Пример 2.8. Группа вращений $SO(3)$ является гладким подмногообразием в $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$.

Задача 2.9. Доказать это утверждение.

Одно из доказательств заключается в следующем: пусть $X \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$. Рассмотрим отображение $\varphi : X \to XX^T$. Ортогональная группа будет прообразом единицы, т.е. $\varphi^{-1}(E)$. Чтобы воспользоваться теоремой о неявной функции, нужно проверить сюръективность дифференциала φ в любой точке ортогональной группы.

Задача 2.10. Посчитать $d\varphi(E)$. Почему этот дифференциал сюръективно отображает пространство матриц на пространство симметрических матриц?

Лекция 3

Пусть дано риманово многообразие M с формой g, пусть определен путь γ. Скалярное произведение относительно формы g будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Определение 3.8. *Фукционалом энергии* называется функционал

$$E(\gamma) := \int_0^1 \langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle dt.$$

Задача 3.11. Доказать, что $L(\gamma)^2 \leq E(\gamma)$.

Указание: воспользоваться интегральным неравенством КБШ.

Задача 3.12. Доказать, что равенство достигается в случае *натуральной параметризации* (то есть $\dot\gamma \equiv 1$).

Теорема о существовании локально кратчайшей

В силу теорем, не обсуждаемых здесь, существует вложение $M \hookrightarrow E^N$ в евклидово пространство с сохранением метрики. Для дальнеших рассуждений M будет компактным и без края.

Главная теорема. Для любых $p, q \in M$ существует путь $\gamma_0\colon [0,1] \to [p,q]$ такой, что $E(\gamma_0) = \inf_\gamma E(\gamma)$. При этом кривая γ_0 будет кратчайшей.

Набросок доказательства. Проведем доказателство в несколько шагов.

Шаг 1. Пусть γ_0 — минимальный по энергии (ленивый) путь существует (вопрос о существовании относится скорее к функциональному анализу и пока не обсуждается). Рассмотрим в евклидовом пространстве, в которое вложено наше многообразие. Пусть U_ε — ε-*воротник* многообразия M. Рассмотрим проекцию $\pi_M : x \mapsto \{$ближайшая к x точка M$\}$.

Задача 3.13. Доказать, что проекция π_M — корректно определена на U.

Задача 3.14. Доказать, что $d\pi_M$ — ортогональный проектор $E^N \to T_{\pi(x)}M$.

Шаг 2. Рассмотрим $\varphi \in C^\infty([0,1]^N, E), supp(\varphi) = (0,1)$. Тогда путь $\gamma_0 + \varepsilon\varphi$ будет жить в U для достаточно малого ε.

Рассмотрим $\gamma_\varepsilon := \pi_M(\gamma_0 + \varepsilon\varphi)$. Для простоты будем считать, что M — это гиперповерхность в E^N.

Лемма 3.1. Пусть M — гиперповерхность, γ_0 — экстремальный путь функционала энергии $\Leftrightarrow \ddot\gamma(t) \perp T_{\gamma_0(t)}M$.

Доказательство. $0 = \frac{1}{2} * \frac{d}{d\varepsilon} E(\gamma_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$ = в силу ленивости пути. Вспоминая, что участники скалярного произведения дифференцируются по очереди, получаем $= \frac{1}{2} * \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 < \dot\gamma_\varepsilon, \dot\gamma_\varepsilon > dt\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 < \dot\gamma_\varepsilon, \frac{d}{d\varepsilon}\dot\gamma_\varepsilon > dt\Big|_{\varepsilon=0}$ = снова вспоминая, кто есть кто, получаем: $= \int_0^1 < \dot\gamma_0, \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\left(\pi_M(\gamma_0 + \varepsilon\varphi)\right) > dt\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 < \dot\gamma_0, \frac{d}{dt}\left(d\pi_M(\gamma_0) * \varphi\right) > dt$ Далее интегрируем по частям и используем самосопряженность проектора. $= -\int_0^1 < \ddot\gamma_0, d\pi_M(\gamma_0) * \varphi > dt = -\int_0^1 < d\pi_M(\gamma_0)\left(\ddot\gamma_0\right), \varphi > dt = 0$ Победа. □

Из леммы выведем, что γ натурально параметризована. $0 = 2\langle\ddot\gamma_0, \dot\gamma_0\rangle = \frac{d}{dt}|\gamma_0|^2$ Утверждение о кратчайшей легко следует из задачи 3.11.

Семинар

Задача 3.15. Доказть, что $\langle X, Y\rangle = tr(XY^t)$ – симметричная билинейная евклидова форма.

Таким образом, она задает евклидову метрику в касательном пространстве $T_E(SO(3))$. С помощью левого (L_g) или правого (R_g) сдвигов эта метрика переносится в касательное пространство $T_g(SO(3))$, превращая $SO(3)$ в риманово многообразие.

Задача 3.16. Доказать, что метрики полученные правыми и левыми сдвигами на группе $SO(3)$ совпадают, т.е. $\langle gK_1, gK_2\rangle = \langle K_1, K_2\rangle_E = \langle K_1 g, K_2 g\rangle$ для любых $K_1, K_2 \in T_E(SO(3))$

Лекция 4

Как всегда, $M \hookrightarrow E^n$ — гладкое многообразие. Действие происходит на гиперповерхности $f = 0$, т.е. $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. При этом хотим, чтобы $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \neq 0$. Введем вектор нормали в каждой точке, нормируя градиент функции $n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

Дифференцирование векторного поля по направлению V.

Пусть у нас есть вектор $V = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ в точке $p \in M$. Также рассмотрим векторное поле $X = (X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n))$.

Тогда $\nabla_V f = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$ и $\nabla_V X = \begin{pmatrix} \nabla X_1 \\ \vdots \\ \nabla X_n \end{pmatrix}$.

Определение 4.9. Пусть $V \in T_pM$. Тогда оператор $L\colon T_pM \to T_pM, L(V) = -\nabla_V n$ называется *оператором формы.*

Корректность: хотим проверить, что $-\nabla_V n \in T_pM$.

Действительно, поскольку $(n, n) = 1$, $\nabla_v(n, n) = 0$ как производная от констаны. С другой стороны, $\nabla_v(n, n) = 2(\nabla_v n, n)$, таким образом, $\nabla_v n \perp n \Rightarrow \nabla_v n \in T_pM \Rightarrow L(v) \in T_pM$.

Свойства оператора формы:

(1) собственное значение k_i оператора L — *главные кривизны* M в точке p. Собственные векторы — *направления главных кривизн.*

Задача 4.17. Посчитать кривизну параболы $y = x^2$ в точке $x = 0$.

(2) $\det L = K$ — *гауссова кривизна.*

Задача 4.18. $M = S^n \hookrightarrow E^n$, как устроен оператор $L(v)$ на сфере? Показать, что он будет выглядеть так: $L(v) = \frac{v}{r}$ (все собственные значения и главные кривизны будут равны $\frac{1}{r}$.)

Задача 4.19. Две кривые γ_1 и γ_2 выходят из точки p с одинаковыми скоростями, т.е. $(\dot{\gamma_1})_{t=0} = (\dot{\gamma_2})_{t=0}$. Показать, что проекция ускорения $(\ddot{\gamma_1}, n) = (L_p(v), v) = (\ddot{\gamma_2}, n)$.

Теорема 4.4. L — самосопряженный оператор, т.е. $(Lv, w) = (v, Lw)$ $\forall v, w \in T_pM$.

Доказательство: Самосопряженность оператора формы означает то, что $(\nabla_v n, w) = (v, \nabla_w n)$.

Теперь применим к вектору v оператор L_p: $L_p(v) = \nabla_v \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla f|}\nabla_v(\nabla f) + \nabla_v(\frac{1}{|\nabla f|})\nabla f$. Обозначим I: $= \frac{1}{|\nabla f|}\nabla_v(\nabla f)$, II: $= \nabla_v(\frac{1}{|\nabla f|})\nabla f$.

Вычислим $(L_p(v), w) = (I, w) + (II, w)$. Поскольку II — вектор ортогональный касательному пространству, а w — вектор из касательного пространства, $(II, w) = 0$. Таким образом, $(L_p(v), w) = (\frac{1}{|\nabla f|}\nabla_v(\nabla f), w) = \frac{1}{|\nabla f|}(\nabla_v(\nabla f), w)$.

$(\nabla_V = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, w) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j$. Поскольку f — гладкая функция, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Таким образом, самосопряженность оператора доказана.

□

Теорема 4.5. (M, g) — полное риманово многообразие, $m \in M$, то существует шар $B_r(m)$ такой, что любые две точки $p, q \in B_r(m)$ соединяет единственная кратчайшая (или экстремаль функционала энергии).

Доказательство: Дано: $p, q, \gamma_0, \gamma_1, E(\gamma_0) = E(\gamma_1) = \inf E(\gamma) \mid_{\gamma \text{ соединяет p и q}}$. Пусть $\gamma_0 \neq \gamma_1$ (хотим прийти к противоречию, если точки будут находиться близко друг от друга). $E(\gamma_0) = E(\gamma_1) = \inf E(\gamma)$ (γ соединяет p и q).
$|\dot{\gamma_0}|^2 = |\dot{\gamma_1}|^2 = E(\gamma_0) = E(\gamma_1)$, $d(p, q) = |\dot{\gamma_0}| = |\dot{\gamma_1}|$.

Далее будем делать оценки: $E(\gamma_1) = E(\gamma_0) + 2\int_0^1 (\dot{\gamma_0}, \dot{\gamma_1} - \dot{\gamma_0}) + \int_0^1 (\dot{\gamma_0} - \dot{\gamma_1}, \dot{\gamma_0} - \dot{\gamma_1})$.

Оцениваем первый интеграл: $\int_0^1 (\dot{\gamma_0}, \gamma_1 - \gamma_0) = -\int_0^1 (\ddot{\gamma_0}, \dot{\gamma_0} - \dot{\gamma_1})$ (интегрирование по частям). По форуле Ньютона – Лейбница можем расписать: с одной стороны $\int_0^1 \frac{d}{dt}(\dot{\gamma_0}, \gamma_1 - \gamma_0) = (\dot{\gamma_0}, \gamma_1 - \gamma_0) \mid_0^1 = 0$ (т.к. γ_0 и γ_1 стартуют и финишируют в одних точках), с другой стороны $\int_0^1 \frac{d}{dt}(\dot{\gamma_0}, \gamma_1 - \gamma_0) = \int_0^1 (\ddot{\gamma_0}, \gamma_1 - \gamma_0) + \int_0^1 (\gamma_0, \dot{\gamma_1} - \dot{\gamma_0}) = 0$. Наши кривые — геодезические, поэтому ускорение перпендикулярно касательному пространству. Тогда начальный интеграл будет выглядеть как $-\int_0^1 (\ddot{\gamma_0}, \dot{\gamma_0} - \dot{\gamma_1}) = -\int_0^1 (\ddot{\gamma_0}, n)(n, \gamma_1 - \gamma_0)$. После интегрирования по частям ($\frac{d}{dt}(\dot{\gamma_0}, n) = (\ddot{\gamma_0}, n) + (\dot{\gamma_0}, \frac{dn}{dt}) = 0$, т.к. $(\dot{\gamma_0}, n) = 0$) получаем $-\int_0^1 (\ddot{\gamma_0}, n)(n, \gamma_1 - \gamma_0) = \int_0^1 (\dot{\gamma_0}, \frac{dn}{dt})(n, \gamma_1 - \gamma_0) = \int_0^1 q(\dot{\gamma_0})(n, \gamma_1 - \gamma_0)$, где $q(\dot{\gamma_0} = (L(\dot{\gamma_0}), \dot{\gamma_0})$.

Задача 4.20. Показать, что $\frac{dn}{dt} = L(\dot{\gamma_0})$.

Вывод. $\mid q(\dot{\gamma_0}) \mid \leqslant C_1(\dot{\gamma_0}, \dot{\gamma_0})$.

Вывод. $\mid (n, \gamma_1 - \gamma_0) \mid < C_2 \mid \gamma_1 - \gamma_0 \mid^2$.

Задача 4.21. Доказать два предыдущих утверждения.

Итог. $\mid \int_0^1 (\dot{\gamma_0}, \frac{dn}{dt})(n, \gamma_1 - \gamma_0) \mid < C \int_0^1 (\dot{\gamma_0}, \dot{\gamma_0}) \mid \gamma_1 - \gamma_0 \mid^2 = C d^2(p, q) \sup_{t \in [0,1]} \mid \gamma_1 - \gamma_0 \mid^2 \leqslant C d^2(p, q) \int_0^1 (\dot{\gamma_1} - \dot{\gamma_0}, \dot{\gamma_1} - \dot{\gamma_0})$.

□

Семинар

Задача 4.22. Посчитать кривизну K гиперболоида, заданного уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = -1$. *Указание:* Возможно, что считать будет проще, если записать все в гиперболических координатах.

Лекция 5

Теперь поговорим о незаконченных сюжетах, оставшихся с предыдущих лекций.

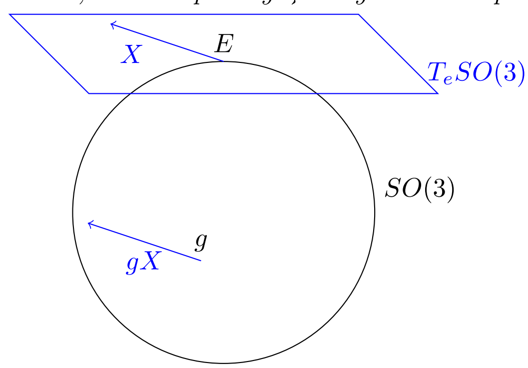
- *Геодезические на сфере S^2.*
  КАРТИНКА

Пусть есть геодезическая, отличная от данной. Т.к. есть симметрия относительно p, q, то можем сделать отражение $\Leftrightarrow$ получаются две кривые одинаковой длины $\Leftrightarrow$ противоречие с единственностью.

- *Геодезические на* $SO(3)$.

Утверждение 5.2. Любая геодезическая, проходящая через единицу является однопараметрической подгруппой.

- *Трехмерные группы Ли, на которых существует биинвариантная метрика.*



Попробуем перенести вектор X из касательного пространства в единице в точку $g \in SO(3)$ и вернуть его обратно. Это можно сделать, действуя на вектор элементами g и g^{-1} слева и справа соотв. Т.е. $X \to gX \to gXg^{-1}$. Тогда назовем присоединенным предаставлением $Ad_g(X) := gXg^{-1}$.

Утверждение 5.3. Если $\mid X \mid = \mid Ad_g(X) \mid$, то метрика на группе биинвариантная.

Трехмерные компактные группы Ли, на которых существует биинвариантная метрика: $SO(3), \mathbb{T}^3$.

Теорема Гаусса - Боннэ

Теорема 5.6. Пусть S — замкнутая, компактная, гладкая поверхность без края, вложенная в E^3. K — гауссова кривизна, тогда

$$\int_S K\omega_S = 2\pi\chi(S),$$

где ω_S — форма площади, $\chi(S) = 2 - 2g$ — эйлерова характеристика, g — род поверхности.

Шаг 1. Рассмотрим отображение $\varphi : S \to S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

- *Гаусс*: если многообразие замкнуто, то φ — отображение "на".
- $d\varphi : T_sS \to T_{\varphi(s)S} \Rightarrow d\varphi : T_sS \to T_sS$.

Задача 5.23. Показать, что $d\varphi_s = L_s = \frac{d}{dv}\vec{n}$.

Тогда $\det(d\varphi_s) = \det(L_s) = K$.

Шаг 2.

$$S \xrightarrow{\varphi} S^2$$

$$\dim S = 2 \qquad \dim S^2 = 2$$

Точки $s \in S$, где $\det(d\varphi_s) \neq 0$ называется *регулярной*, $\det(d\varphi_s) = 0$ — *сингулярной*. По *теореме Сарда* $Sing\varphi$ (= множество сингулярных точек) имеет меру 0.

Определение 5.10. *Степень отображения* $\deg\varphi = \sum\limits_{s\in\varphi^{-1}(p)} \omega_s$, где $p \notin sing\varphi$, $\omega_s = \ sign\det(d\varphi_s) = \ signK_s, p \in \ S^2$.

Шаг 3. (Кронекер).

$$\frac{\int_S K\omega_s}{\int_S^2 \omega_s^2} = \deg\varphi_{\text{Гаусс}}. \tag{1}$$

Шаг 4. (Dyck).

$$\frac{\chi(S)}{\chi(S^2)} = \deg\varphi_{\text{Гаусс}}.$$

Теперь подставим в (1) $\omega_s = 4\pi, \chi(S^2) = 2$, получаем утверждение теоремы Гаусса-Боннэ.

Кривизна

Кривизну на поверхности можно определять и по-другому. Н.И. Лобачевский определял кривизну как

$$l(r) = 2\pi r - \frac{2\pi}{3!}Kr^3 + O(r^4).$$

Локально-евклидовы пространства

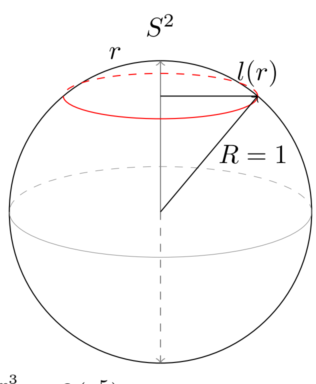
Определение 5.11. Риманово многообразие называется *локально-евклидовым*, если у каждой точки существует окрестность, изометричная шару в евклидовом пространстве (т.е. кривизна равна 0). Пусть M — замкнутое, полное, локально-евклидово многообразие.

Утверждение 5.4. Тогда универсальная накрывающая $\tilde{M}$ — это полное, локально-евклидово риманово многообразие, изометричное E^n.

Следствие 5.1. Любое локально-евклидово пространство имеет вид $E^n/_{\Gamma\sim\ \pi_1(M)}$, где Γ — дискретная, свободная группа движений, изоморфная $\pi_1(M)$.

Семинар

Задача 5.24. Посчитаем кривизну сферы, используя формулу Лобачевского.



$l(r) = 2\pi l = 2\pi\sin r = 2\pi - \frac{r^3}{6} + O(r^5) \Rightarrow K = 1.$

Задача 5.25. Для сферы $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset E^3$ и сферической системы координат:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\sin\theta \\ y = \sin\varphi\sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

написать риманову метрику в локальных координатах (φ, θ). Написать матрицу Грама g в базисе $(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta})$.

Задача 5.26. Вычислить в знающем уме кривизну $SO(3)$.

На $SO(3)$ можем ввести метрику

$$tr(KK^t), K \in T_E SO(3) = \{K \in M_3(\mathbb{R}) \mid \ K^t = \ K\}.$$

Проверим, что эта метрика двусторонне инвариантная. Действительно, $tr(gKg^{-1}gK^tg^{-1}) = tr(gKK^tg^{-1}) = tr(KK^t)$. Из-за биинвариантности метрики получаем, что кривизна одинакова во всех точках.

Покажем, что $SU(2)$ — двулистное накрытие $SO(3)$, значит, у $SO(3)$ кривизна такая же, как и у $S^3 \cong SU(2)$.

Рассмотрим кватернионы $\{q \mid q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \ \mathbb{R}\}$, где

$$\begin{cases} k^2 = i^2 = j^2 = -1 \\ ij = k \\ ji = -k \end{cases}$$

Тогда $SU(2) = \{q \mid N(q) = 1\}$, $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Задача 5.27. Доказать, что $\{q \mid N(q) = 1\}$ — группа.

Определение 5.12. *Чистым кватернионом* называются кватернионы вида $p = bi + cj + dk$.

Зададим отображение $\varphi(q)p : p \to qpq^{-1}, q \in SU(2)$.

Задача 5.28. Доказать следующие утверждения:

- $\varphi(q) \in SO(3)$;
- $\varphi(q) = \varphi(q') \Leftrightarrow q = \pm q'$;
- φ — отображение "на"$SO(3)$.

Таким образом, $SU(2) \to SO(3)$ — 2–накрытие.

Лекция 6

Пусть $V(M)$ — пространство векторных полей на M. Напомним определение производной по направлению: $X \in M, f \in C^\infty(M)$, тогда производной функции f по направлению X называется $\frac{\partial f}{\partial X} = df(X)$.

Определим понятие *гладкого векторного поля* двумя способами.

Определение 6.13.
(1) X — *гладкое векторное поле*, если для любой $f \in C^\infty(M)$ производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial X} = df(X) \in C^\infty(M)$ для $X \in M$.
(2) (координатное определение) Если векторное поле X можно записать в виде $X = \sum_i a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $a_i(x_1, \ldots, x_n) \in C^\infty(M)$, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ — базис $T_m M$ в каждой точке $m \in M$, то X — *гладкое векторное поле.*

Теперь пусть у нас есть векторные поля X, Y. Как дифференцировать одно векторное поле по направлению другого? Для этого определим *ковариантную производную.*

Определение 6.14. *Ковариантной производной* называется оператор

$$\nabla \colon V(M) \times V(M) \longrightarrow V(M)$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_Y X \in C^\infty(M)$$

обладающий следующими свойствами:

(1) $\mathbb{R}$ – билинейная операция (поточечно);
(2) $\nabla_Y f = \frac{\partial f}{\partial Y} = df(Y)$;
(3) $\nabla_{gY} X = g\nabla_Y X, g \in C^\infty(M)$;
(4) $\nabla_Y(fX) = (\nabla_Y f)X + f(\nabla_Y X)$ (правило Лейбница).

Связность на карте и коэффициенты Кристоффеля

Пусть векторные поля X, Y в базисе $\{e_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\}$ записываются в виде: $X = \sum a_i e_i$, $Y = \sum b_j e_j$. Тогда, пользуясь свойствами ковариантной производной, можем записать в координатах ковариантную производную X по Y. $\nabla_Y X = \nabla_{\sum b_j e_j} \sum a_i e_i = \sum c_i e_i$, где $c_i = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} a_k b_j$. Осталось только понять, что такое $\nabla_{e_j} e_i = \sum \Gamma^\alpha_{ij} e_\alpha$, где Γ^α_{ij} — это и есть *символы Кристоффеля.*

Задача 6.29. (1) $\alpha\nabla_1 + (1-\alpha)\nabla_2$ — выпуклая линейная комбинация двух связностей тоже связность (проверить все свойства).
(2) $\nabla_1 - \nabla_2$ — (2,1) – тензор (если на многообразии придумать связность, то все другие будут получаться из нее добавлением тензора типа (2,1)).

Определение 6.15. Связность называется *симметрической (связностью без кручения)*, если $\Gamma^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ji}$, $\alpha, i, j = 1, \ldots, \dim M = n$.

Симметричность связности эквивалентна тому, что $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y]$ (напомним, что $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$).

Следствие 6.2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Rightarrow [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Параллельный перенос вдоль кривой

Определение 6.16. Векторное поле $X(\gamma(t))$ называется *параллельным вдоль кривой* $\gamma\colon [a, b] \to M$, если $\nabla_{\dot\gamma} X(\gamma(t)) = 0$.

Пусть $Y = \dot\gamma, X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда условие параллельного переноса будет выглядеть так:

$$(\nabla_{\dot\gamma} X)_i = \frac{dX_i(\gamma(t))}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(\gamma(t)) \cdot X_k(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_j(t) = 0.$$

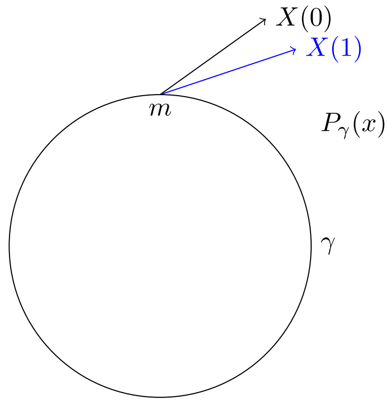
Т.е. речь идет о решении систем линейных дифференциальных уравнений типа $X = A\dot X$, где A — функциональная матрица, зависящая от скоростей и символов Кристоффеля Γ^i_{jk}, $X_{m_0} = X(0)$. По теореме из ОДУ каждому начальному вектору $X(0)$ в точке m_0 можно однозначно сопоставить вектор $X(1)$ в точке m_1, который и есть результат параллельного переноса вектора $X(0)$ вдоль пути из точки m_0 в точку m_1.

Задача 6.30. Почему $X(0) \to X(1)$ будет изоморфизмом касательных пространств?

Замечание 6.1. Параллельный перенос, вообще говоря, зависит от пути.

Группа голономии

Рассматриваем замкнутые гладкие пути в т. m и параллельные переносы вдоль них. Попадаем в подгруппу ортогональной группы $O(T_m M)$. Эта подгруппа называется группой голономии Hol_m.



Геодезическая связности

Определение 6.17. Кривая γ называется *геодезической*, если $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$.

Замечание 6.2. Геодезические определяются только по связности.

Семинар

Связности Леви–Чивита (связность, согласованная с метрикой):

$$\nabla_Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \tag{2}$$

Теорема 6.7. Существует и единственна симметрическая связность, совместимая с метрикой в смысле (2).

Рассмотрим плоскость с полярной системой координат (r, φ) и метрикой $dl^2 = (dr)^2 + f^2(d\varphi)^2$, $f = f(r)$.

Задача 6.31. Вычислить для такой метрики символы Кристоффеля связности Леви–Чивита.

Задача 6.32. Проделать те же вычисления в полярной системе координат (φ, θ)

$$\begin{cases} x = \cos\theta\sin\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}.$$

на сфере S^2 со стандартной метрикой.

Лекция 7

Пусть даны два векторных поля X и Y на многообразии M. Чем отличается ковариантная производная $\nabla_X Y$ от производной Ли $L_X(Y)$?

Ковариантная производная: находит производную векторного поля Y, заданного в окрестности точки $m \in M$, по направлению вектора X, заданного в точке m.

Производная Ли: считает производную поля Y, зная фазовые кривые (т.е. динамику) поля X в окрестности точки $m \in M$.

Теорема 7.8. Производная Ли векторного поля Y по векторному полю X — это коммутатор этих полей $L_X(Y) = [X, Y]$.

Пример 7.9. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$. Зададим на этом отрезке связность, определенную в этом случае одним символом Кристоффеля $\Gamma(x) = \frac{1}{x}$. Пусть также задан вектор $X(a)$ (в точке a), который мы хотим параллельно перенести вдоль пути $\gamma, \gamma(0) = a, \gamma(1) = b, \dot\gamma \neq 0$. На прошлой лекции мы вывели уравнение параллельного переноса.

Подставив в него наши условия, получим: $\frac{dX}{dx}\frac{\partial x}{\partial t}+\Gamma(x)\dot\gamma(t)X=\frac{dX}{dx}\dot\gamma(t)+\Gamma(x)\dot\gamma(t)X=0$. Поделим обе части уравнения на $\dot\gamma(t)$ и подставим выражение для связности, после чего получаем дифференциальное уравнение: $\frac{dX}{dx}+\frac{X}{x}=0\Rightarrow\frac{dX}{X}=-\frac{dx}{x}$.

Таким образом, $X=\frac{C}{x}\Rightarrow X(a)=\frac{C}{a}\Rightarrow C=aX(a)$, т.е. $X=\frac{aX(a)}{x}\Leftrightarrow X(t)=\frac{aX(\gamma(0))}{\gamma(t)}$. Зная это, находим $X(b)=\frac{a}{b}X(a)$.

Задача 7.33. Какую функцию $\Gamma(x)$ нужно взять, чтобы параллельный пееренос сохранял длины?

Связность Леви-Чивита

Определение 7.18. *Связностью Леви-Чивита* называется оператор ∇, обладающий следующими свойствами:

(1) $\mathbb{R}$ – билинейная операция (поточечно);
(2) $\nabla_{gY}X=g\nabla_YX, g\in C^\infty(M)$;
(3) $\nabla_Y(fX)=(\nabla_Yf)X+f(\nabla_YX)$ (правило Лейбница);
(4) $\nabla_Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle$.

Здесь и далее "связность"= "симметричная связность". В дальнейшем всюду рассматривается связность Леви–Чивита.

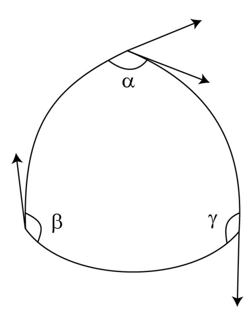
Параллельный перенос вдоль геодезической

Рассмотрим две точки $m_0,m_1\in M$ и соединим их геодезической, т.е. таким путем γ, что $\nabla_{\dot\gamma_t}\dot\gamma_t=0$. Пусть X — параллельное вдоль кривой γ векторное поле.

Утверждение 7.5. При параллельном переносе вектора $X_(0)$ вдоль пути γ, длина вектора $X(t)$ и его угол с вектором $\dot\gamma_t$ будут сохраняться.

$\square$ Действительно, $\nabla_{\dot\gamma}\langle X(t),\dot\gamma(t)\rangle=\langle\nabla_{\dot\gamma}X(t),\dot\gamma(t)\rangle+\langle X(t),\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(t)\rangle$. Первое слагаемое равно нулю, т.к. поле параллельно вдоль кривой, второе равно нулю, т.к. γ — геодезическая. Таким образом, $\nabla_{\dot\gamma}\langle X(t),\dot\gamma(t)\rangle=0$. $\square$

Задача 7.34. Рассмотрим сферический треугольник с углами α,β,γ. На какой угол повернется вектор с началом в вершине A, если его параллельно перенести вдоль сторон треугольника?



Замечание 7.3. На евклидовой плоскости в подобной ситуации вектор повернулся бы на нулевой угол. Для произвольной поверхности постоянной кривизны K угол поворота равен $\int_\triangle Kd\omega$.

Связность Леви–Чивита на гиперповерхности в E^N

Задача 7.35. Доказать, что $\nabla_Y X = dX(Y) - \langle n, dX(Y)\rangle n$.

(1) Билинейность по X и Y:хотим $\nabla_Y(X_1+X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$. Распишем левую часть: $\nabla_Y(X_1+X_2) = d(X_1(Y)+X_2(Y)) - \langle n, dX_1(Y)+dX_2(Y)\rangle n = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$. Аналогично проверяется и второе соотношение: $\nabla_{Y_1+Y_2} = dX(Y_1+Y_2) - \langle n, dX(Y_1+Y_2)\rangle n = dX(Y_1) + dX(Y_2) - \langle n, dX(Y_1)\rangle n - \langle n, dX(Y_2)\rangle n = \nabla_{Y_1} X + \nabla_{Y_2} X$.

(2) $\nabla_{gY} X = dX(gY) - \langle n, dX(gY)\rangle n = g dX(Y) - g\langle n, dX(Y)\rangle n = d\nabla_Y X$.

(3) $\nabla_Y(fX) = d(fX)(Y) - \langle n, d(fX)(Y)\rangle n$. По формуле Лейбница $d(fX_i) = dfX_i + fdX_i$, где X_i — i-я компонента вектора X. Таким образом, $\nabla_Y(fX) = (df)(Y)X + f(dX)(Y) - \langle n, (df)(Y)X + f(dX)(Y)\rangle n$, причем $\langle n, df(Y)X\rangle = 0$. В итоге получаем $\nabla_Y(fX) = df(Y)X + f\{dX(Y) - \langle n, dX(Y)\rangle n = df(Y)X + f\nabla_Y X = (\nabla_Y f)X + f\nabla_Y X$.

Задача 7.36. Проверить 4-е свойство.

Ковариантное дифференцирование дифференциальных форм

Как найти ковариантную производную $(\nabla_Y \omega)$? Воспользуемся правилом Лейбница и тем, что мы умеем находить ковариантные производные от функций: $\nabla_Z \omega(Y) = (\nabla_Z \omega)(Y) + \omega(\nabla_Z Y)$. Получаем $(\nabla_Y \omega) = \nabla_Z \omega(Y) - \omega(\nabla_Z Y)$.

Пример 7.10. Найдем ковариантную производную билинейной формы $b(X,Y)_m$: поскольку $(\nabla_Z b)(X,Y) = \nabla_Z(b(X,Y)) - b(\nabla_Z X, Y) - b(X, \nabla_Z Y)$, $\nabla_Z b(X,Y) = (\nabla_Z b)(X,Y) + b(\nabla_Z X, Y) + b(X, \nabla_Z Y)$.

Лекция 8

$M^N \hookrightarrow E^{N+1}$, (M,g) — риманово многообразие. Пусть векторные поля $X \in V(M), Y \in V(M)$ записываются в виде $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$.

Мы хотим проверить, что $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X,Y] = dX(Y) - dY(X)$, где $dX = \begin{pmatrix} dX_1 \\ \vdots \\ dX_n \end{pmatrix}$.

Задача 8.37. Показать, что $[X,Y] = dX(Y) - dY(X)$.

Докажем, что $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X,Y]$. Напомним, что коммутатор координатных векторных полей равен нулю.

Сначала распишем почленно левую часть этого вывыражения. $\nabla_Y X = dX(Y) - (dX(Y), n)n$. Аналогично $\nabla_X Y = dY(X) - (dY(X), n)n$. Следовательно, $\nabla_Y X - \nabla_X Y = dX(Y) - dY(X) + (dX(Y) - dY(X), n)n$.

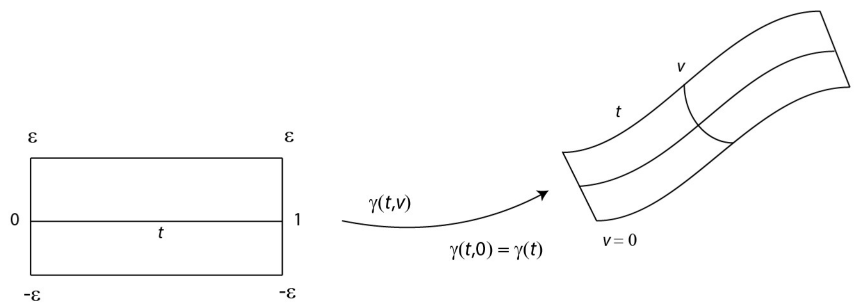
Утверждение 8.6. $(dX(Y) - dY(X), n)n = 0$.

Доказательство: *Первый способ.* Если два векторных поля лежат на гиперповерхности, то и их коммутатор лежит на гиперповержности.

Второй способ. Заметим, что $(X,n) = 0$, т.к. $X \in T_m M$, $n \perp T_m M$. Возьмем ковариантную производную: $\nabla_Y(X,n) = (\nabla_Y X, n) + (X, \nabla_Y n) = (\nabla_Y X, n) + (X, L(Y)n) = 0$, $\nabla_X(Y,n) = (\nabla_X Y, n) + (Y, \nabla_X n) = (\nabla_X Y, n) + (Y, L(X)n) = 0$. Из этого следует, что $(X, L(Y)n) - (Y, L(X)n) = 0$. $\square$

Первая вариация

Пусть $\gamma\colon [0,l] \to M$, $L(\gamma) = \int_0^l \sqrt{(\dot\gamma, \dot\gamma)}dt$. Будем "шевелить" эту кривую.Формально это выглядит так: берем отрезок $[0,1]$ и рассматриваем отображение в M прямоугольника $\gamma(v,t)\colon [0,1] \times [-\epsilon, \epsilon] \to M$, $\gamma(t,0) = \gamma(t)$. Пусть $V = \frac{\partial\gamma}{\partial v}$ — поле "поперечных" направлений (деформационное поле), $T = \frac{\partial\gamma}{\partial t}$ — поле скоростей.



Задача 8.38. $L(v) = \int_0^l \sqrt{(\dot\gamma_t(t,v), \dot\gamma_t(t,v))}dt$, найти производную $\frac{dL}{dv}$.

Теорема 8.9. $\frac{dL}{dv} = (V, \frac{T}{\|T\|}) \mid_0^l - \int_0^l (V, \nabla_T \frac{T}{||T||})dt$.

Если γ натурально параметризована, т.е. $\|T\| = 1$ при $v = 0$, то $\frac{dL}{dv}(0) = (V,T) \mid_0^l$ $- \int_0^l (V, \nabla_T T)dt$.

Теперь предположим, что $\gamma(t) = \gamma(t,0)$ — геодезическая. Тогда по определению $\nabla_T T = 0$. Таким образом, $\frac{dL}{dv}(0) = (V,T) \mid_0^l = (V(l), T(l))$, если $V(0) = 0$.

Кривизна

Определение 8.19. Рассмотрим следующее равенство:выражение $\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ $(*)$. Линейный оператор, который при фиксированных полях X и Y действует на поле Z как $(*)$ называется *оператором (секционной) кривизны* и обозначается $R(X,Y)Z$.

Утверждение 8.7. Оператор кривизны является тензором.

Напоминание: тест на тензор: проверка равенства $R(fX, gY)hZ = \ fghR(X,Y)Z$. Заметим, что для оператора кривизны это свойство, как можно проверить, выполняется.

Лекция 9

Пусть $(M,g) \sim (M, \langle\cdot,\cdot\rangle_m)$, M — связное, полное, риманово многообразие, $\dim M = 2$. Пусть $m \in M$ — его фиксированная точка многообразия. Пусть γ — натурально параметризованная геодезическая (т.е. $\mid \dot\gamma \mid = 1$), соединяющая m с x, $l(\gamma) = x = \{$длина геодезической $\gamma_x\}$.

Теорема 9.10. (*Теорема о палочке.*) $\frac{\partial}{\partial\xi} l(\gamma_x) = \cos(\dot\gamma, \xi) = (\dot\gamma, \xi)$, где $\xi \in T_m M$, $\mid \xi \mid = 1$.

Экспоненциальное отображение

Пусть exp_v — геодезическая, выпущенная из точки $m \in M$ с начальной скоростью V. Рассмотрим экспоненциальное отображение $Exp\colon V \to \exp_V(1)$ из касательного пространства $T_m M$ в точке m в само многообразие M.

Утверждение 9.8. $d(Exp)_m = id$.

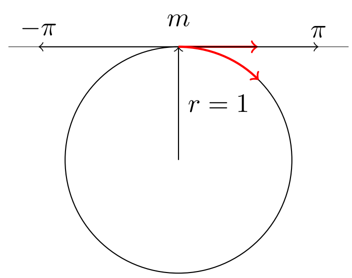
Утверждение 9.9. Каждая точка многобразия M обладает суперхорошей окрестностью $U_m \subset M$ (каждые две точки можно соединить геодезической, которая будет кратчайшей), которая является дифференциальным образом шара: $Exp\colon B_0(r) \to U_m$.

Следствие 9.3. Это утверждение и теорема о палочке позволяют перенести полярную систему координат с касательного пространства к поверхности.

Отрезок

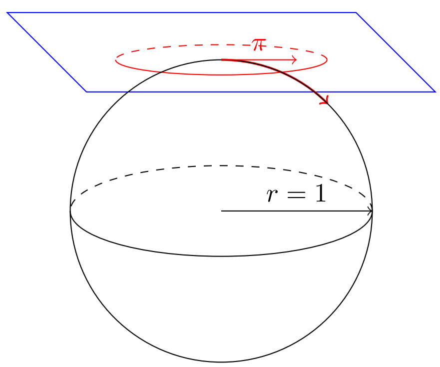
Обозначим $\text{Отр}_m\colon\ = \{v \in T_m M \mid \exp_m(tv)$ – кратчайшая при всех t$, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Посмотрим на примерах, каким может быть это множество.

Пример 9.11. Рассмотрим окружность единичного радиуса. Тогда Отр_m — векторы длины $\leqslant \pi$.



Ясно, что при проекции на окружность такие векторы переходят в кратчайшую.

Пример 9.12. Для сферы S^2 такой областью будет диск D_π в касательном пространстве.



Теперь обозначим $\mathcal{O} := \text{Отр}_m$, $\tilde{\mathcal{O}} := Exp\ \mathcal{O}$, $\mathcal{O}^0 := \{\text{внутренность}\mathcal{O}\}$ (*внутренность* — наибольшая область, содержащаяся в многообразии).

Задача 9.39. Как выглядит образ внутренности при отображении Exp в случае S^1, S^2, бесконечного цилиндра, тора?

Утверждение 9.10. Отображение $Exp\colon \mathcal{O}^0 \to M$ является вложением (т.е. однозначным отображением с дифференциалом полного ранга).

Введем еще одно понятие $\partial(\tilde{\mathcal{O}}^0) = cut\ locus$.

Пример 9.13. На плоскости Лобачевского экспоненциальное отображение выглядит как на евклидовой плоскости (можем любые две точки соединить единственной кратчайшей). Таким образом, у этой области нет границы.

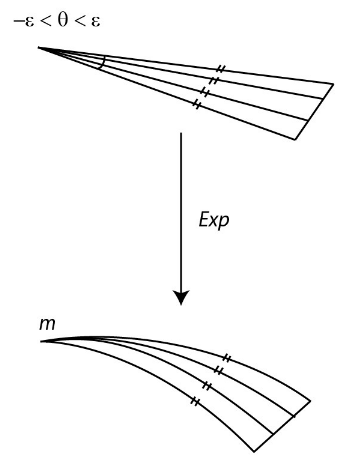
Рассматривая другие примеры, можно сделать вывод, что *cut locus* зависит от кривизны многообразия.

Полярная система координат на M^2

Введем на поверхности в окрестности точки полярную систему координат (r, φ).

Лемма 9.2. (*Гаусс.*) Доказать, что $\frac{\partial}{\partial r} \perp \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Задача 9.40. Вывести лемму Гаусса из леммы о палочке.



Задача 9.41. Доказать, что метрика в полярных координатах имеет вид $(ds)^2 = (dr)^2 + \varphi^2(r, \theta)(d\theta)^2$.

Семинар

Определение 9.20. *Секционной кривизной или просто кривизной Гаусса K* называется число $K = (R(X, Y)X, Y)$, где X, Y — два перпендикулярных единичных вектора, а $R(X, Y)$ — оператор кривизны.

Мы не будем останавливаться на доказательстве равносильности двух определений гауссовой кривизны для гиперповерхностей, вложенных в евклидово пространство.

Пусть M — риманово многообразие. Введем на M полярную систему координат $(\partial_r, \partial_\theta)$ в точке p. Следующая теорема сязывает метрику и кривизну.

Теорема 9.11. (фон *Мангольдт.*) Пусть $K(r, \theta)$ — кривизна поверхности M в точке (r, θ). Тогда метрика $(ds)^2 = (dr)^2 + \varphi^2(r, \theta)(d\theta)^2$ связана с кривизной уравнением Якоби: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + K \cdot \varphi = 0$.

Напомним лемму Гаусса, которая говорит, что $(\nabla_r, \nabla_\varphi) = 0$. Кроме того, что $R(X, Y)$ является тензором, то есть $R(fX, gY) = fg(X, Y)$ для любых f, g.

Доказательство: В полярной системе координат матрица Грама метрики выглядит следующим образом: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ Заметим, что $[\partial_r, \partial_\varphi] = 0$ как коммутатор векторных полей. Так как связность симметричная, а коммутатор равен нулю, то $\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_\theta} \partial_r = \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_r} \partial_\theta$. Вычислим значение гауссовой кривизны: $K = \left(R(\partial_r, \frac{\partial_\theta}{\varphi})\partial_r, \frac{\partial_\theta}{\varphi} \right) = \frac{1}{\varphi^2} \left(R(\partial_r, \partial_\theta)\partial_r, \partial_\varphi \right)$.

Утверждение 9.11. $\nabla_{\partial_\theta} \nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$

Доказательство: По определению экспоненциального отображения $\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$. $\square$

Посчитаем $\nabla_{\partial_r}\nabla_{\partial_\theta}\partial_r = \nabla_{\partial_r}\nabla_{\partial_r}\partial_\theta$.

Поскольку $\nabla_{\partial_r}(\partial_\theta, \partial_\theta) = \nabla_{\partial_r}\varphi^2 = 2\varphi\varphi_r$, $2\varphi\varphi_r = 2(\nabla_{\partial_r}\partial_\theta, \partial_\theta)$. Так как $(\partial_\theta, \partial_\theta) = \varphi^2$, получаем: $\nabla_{\partial_r}\partial_\theta = \frac{\varphi_r}{\varphi}\partial_\theta$.

Вооружившись этим равенством и воспользовавшись правилом Лейбница,можем переписать это как $\nabla_{\partial_r}\nabla_{\partial_r}\partial_\theta = \partial_r(\frac{\varphi_r}{\varphi}\partial_\theta) = \left(\frac{\varphi_r}{\varphi}\right)_r \partial_\theta + \frac{\varphi_r}{\varphi}\nabla_{\partial_r}\partial_\theta = \frac{\varphi_{rr}\varphi - \varphi_r^2 + \varphi_r^2}{\varphi^2}\partial_\theta = \frac{\varphi_{rr}}{\varphi}$.

Наконец, $K = \frac{1}{\varphi^2}\left(R(\partial_r, \partial_\theta)\partial_r, \partial_\theta\right) = (\nabla_\theta\nabla_r\partial_r - \nabla_r\nabla_\theta\partial_r + \nabla_{[\partial_r,\partial_\theta]}\partial_r, \partial_\theta) =$
$(-\frac{1}{\varphi^2}\nabla_r\nabla_\theta\partial_r, \partial_\theta) = -\frac{\varphi_{rr}}{\varphi}$. Теорема доказана. □

Конструкция связности Леви-Чивита на SO_3

На SO_3 есть замечательная метрика. Она строится левоинвариантным переносом метрики в касательном пространстве в единице. Вспомним, что в естественном матричном представлении, касательное пространство в E отождествляется с кососимметрическими матрицами K с евклидовой метрикой $-Tr(KK^t)$. Эта метрика инвариантна относительно левых и правых сдвигов (обсуждалось в прошлых лекциях).

Существует единственная симметрическая связность (связность Леви-Чивита), уважающая метрику. Как выглядит эта связность? Мы знаем, что геодезические на SO_3 имеют вид $Exp(Kt)$, в данном случае — это матричные экспоненты $\exp Kt$.

Утверждение 9.12. Пусть $\tilde{X} = \{gX\}$, $X \in T_eSO(3)$, $\tilde{Y} = \{gY\}$, $Y \in T_eSO(3)$ и $\tilde{Z}$. Если X, Y, Z были линейно независимыми, то в любой точке группы $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ образуют базис.

Утверждение 9.13. $[X, Y]$ — левоинвариантное векторное поле, если X, Y — левоинвариантные векторные поля.

Утверждение 9.14. $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$.

Определение 9.21. Определим связность на левоинвариантных полях следующим образом: $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \lambda[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, а затем продолжим ее на любые поля по линейности и правилу Лейбница. При $\lambda = \frac{1}{2}$ построенная связность является связностью Леви-Чивита.

Задача 9.42. Доказать, что так получаются все левоинвариантные связности на группе $SO(3)$.

Лекция 10

Свойства тензора кривизны

Положим $R(X, Y, Z, W) = (R(x, Y)Z, W)$ — тензор типа $(4, 0)$. Этот тензор обладает следующими свойствами:

(1) кососимметричность по парам (X, Y) и (Z, W).
(2) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

Тождество Бьянки — это следующее тождество для оператора кривизны $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$.

Определение 10.22. *Секционной кривизной* называется число $sec\,(X, Y) = \frac{(R(X,Y)X,Y)}{Vol(X \wedge Y)}$, где $Vol(X \wedge Y)$ — квадрат площади параллелограмма, натянутого на векторы X, Y.

Вторая вариация

Полагая, что

а) $||\dot{\gamma}_t|| = 1$;
б) $\dot{\gamma}_s \perp \dot{\gamma}_t$,

вычислим вторую вариацию длины кривой.

$$\textit{Формула Сингха: } \frac{d^2L}{ds^2}(0) = \int_0^l |\nabla_{\dot\gamma_t}\dot\gamma_s|^2 - (R(\dot\gamma_t,\dot\gamma_s)\dot\gamma_t,\dot\gamma_s)dt.$$

Эту формулу можно переписать и так:

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \int_0^l |\nabla_{\dot\gamma_t}\dot\gamma_s|^2 - sec\,(\dot\gamma_t,\dot\gamma_s)|\dot\gamma_s|^2 dt,\ K = sec\,(\dot\gamma_t,\dot\gamma_s),\ |\dot\gamma_s| - \text{длина вектора деформации.}$$

Из этой формулы можно сделать два вывода.

Вывод (1)**.** $K \leqslant 0 \Rightarrow \frac{d^2L}{ds^2} > 0$ (если $\dot\gamma_s \neq 0$).

Это значит, что на геодезической достигается локальный минимум (в данном случае локальность важна, т.к. бывают замкнутые геодезические).

Вывод (2)**.** Пусть $K > k^2 > 0$ (кривизна положительна и отделена от нуля). Тогда

а) (M,g) — компактно;
б) $diam\ M \leqslant \frac{\pi}{K}$.

Замечание 10.4. Утверждение теоремы будет неверно, если $K > 0$. Контрпримером является параболоид в E^3, который хоть и имеет всюду положительную кривизну, но не является компактным многообразием.

Трудная задача. Пусть (M^n,g) — риманово многообразие постоянной секционной кривизны $sec = 1$ (в любой точке). Пусть $\pi_1(M^n) = \langle 1\rangle \Rightarrow (M,g) \simeq$ (сфера S^n, стандартная метрика).

Замечание 10.5. В двумерном случае это выводится из теоремы Гаусса-Бонэ.

Объясним с помощью формулы Сингха, почему на сфере геодезические большой длины перестают быть кратчайшими.

Показательное вычисление. E — нормальное единичное поле, параллельное вдоль геодезической $\gamma(t,0)$. $L(\gamma(t,0)) = l$, $K = 1$, $\dot\gamma_s\ |_{s=0} = \sin(t\frac{\pi}{l})E$. Напишем формулу Сингха: $\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \int_0^l (\frac{\pi^2}{l^2}\cos^2(t\frac{\pi}{l}) - 1\cdot\sin^2(t\frac{\pi}{l}))dt = -\frac{1}{2l}(l^2-\pi^2)$.

Получаем, что при $l > \pi$, $\frac{d^2L}{ds^2}(0) < 0$.

$diam M < \pi$, т.к. мы можем соединить точки кратчайшей кривой длины $> \pi$, длину которой можно уменьшить при шевелении. Получаем противоречие.

Пусть теперь M — компактное многообразие, $K > k^2 > 0$. Рассмотрим универсальное накрытие. Тогда метрика g с многообразия M поднимается наверх (т.к. $\pi\colon \tilde M \to M$ накрытие). Полученную метрику на $\tilde M$ обозначим через $\tilde g$. Накрытие превращается в локальную изометрию двух римановых многообразий $(\tilde M,\tilde g) \to (M,g)$, что влечет выполнение условий $\tilde K = K > k^2 > 0$. Следовательно, универсальное накрытие $\tilde M$ компактно.

Описание сферических форм

Хотим описать все многообразия, кривизна которых постоянна и равна 1.

Пусть есть (M,g), $sec = 1$. Построим универсальное накрытие $(\tilde M,\tilde g)$, которое будет односвязным, компактным римановым многообразием с $sec = 1$, т.е. сферой со стандартной метрикой.

Из топологии известно, что $M \simeq \tilde M/\pi_1(M)$, $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde M$ — дискретное действие, не имеющее неподвижных точек. Таким образом, задача об описании многообразий единичной кривизны свелась к задаче об описании действий на S^n конечных групп ортогональных преобразований без неподвижных точек.

Теорема 10.12. (*Hopf.*) M^n — многообразие с $K = 1$. Тогда $M \simeq S^n/\Gamma$, где $\Gamma \hookrightarrow O(n)$, $\Gamma \curvearrowright S^n$ свободно и, если для $\gamma \in \Gamma, x \in S^n$ $\gamma x = x \Rightarrow \gamma = 1$.

Описание гиперболических форм

Пусть (M^n, g), $secM = -1$, $\pi_1(M) = e$.

Теорема 10.13. (*Картан, Адамар, фон Мангольдт.*) Тогда $M \simeq \Lambda^n$, где Λ^n — гиперболическое пространство или пространство Лобачевского .

Семинар

Задача 10.43. $R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$.

Задача 10.44. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$, где $R(X, Y, Z, W) = (R(x, Y)Z, W)$.

Задача 10.45. Проверить, что кривизна R является тензором.

Лекция 11

Теорема Сингха

Формула первой вариации показывает, что геодезические — это экстремали функционала длины кривой на римановом многообразии, а формула второй вариации — это средство для исследования характера стационарной точки. Вот одно ее применение.

Теорема 11.14. (*Об односвязности*). Пусть M — компактное, полное, риманово, ориентируемое, четномерное многообразие, $secM = K > 0$. Тогда $\pi_1(M) = 0$, то есть M односвязно.

Задача 11.46. Можно ли в этой теореме отказаться от ориентируемости?

Ответ. В случае отказа от ориентируемости, получаем контрпример: $\mathbb{RP}^2$ — неориентируемое, компактное, четномерное многообразие постоянной кривизны 1, у которого $\pi_1(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 11.47. Можно ли отказаться от компактности?

Задача 11.48. Можно ли отказаться от четномерности?

Ответ. Нельзя: рассмотрим $\mathbb{R}P^{2n+1}$

Задача 11.49. Можно ли отказаться от положительности кривизны?

Доказательство: Рассмотрим любую петлю на M. Пусть она лежит в гомотопическом классе A. Нам понадобится следующее чисто топологическое утверждение, которое мы пока примем на веру.

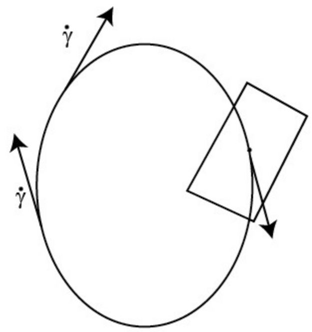
Утверждение 11.15. Если M компактно, то в каждом (свободном) гомотопическом классе петель есть замкнутая гладкая минимальная геодезическая.

Пусть A — нетривиальный класс, а γ — минимальная замкнутая геодезическая в A.

Гладкость означает, что после одного полного обхода замкнутой геодезической γ касательный вектор перейдет в себя). Благодаря тому, что γ — геодезическая, поле скоростей $\dot{\gamma}$ параллельно вдоль γ. Далее заметим, что $T_m = \langle\dot{\gamma}\rangle \oplus \langle\dot{\gamma}\rangle^{\perp}$.

Задача 11.50. Параллельный перенос на ориентируемом римановом многообразии сохраняет ориентацию.

Пусть P – линейное преобразование, являющееся параллельным переносом вдоль γ, т.е. $P\colon T_m \to T_m$. Известно, что связность Леви-Чивита сохраняет скалярное произведение. Тогда P — оператор, ограниченный на $\langle\dot{\gamma}\rangle^{\perp}$, является ортогональным оператором с единичным определителем в нечетномерном пространстве. Значит, у него есть собственный вектор v с собственным значением 1.



Утверждение 11.16. Пусть X — поле, полученное параллельным переносом вектора v вдоль γ.

Теперь применим формулу Сингха:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s^2}(0) = \int_0^l |\nabla_{\dot\gamma} X|^2 - sec(\dot\gamma, X)|X|^2 dt < 0.$$

Так как ковариантная производная параллельного вдоль геодезической поля равна 0, $\nabla_{\dot\gamma} X = 0$. Секционная кривизна положительна по условию. Вторая производная вдоль этого поля будет отрицательна. Таким образом, смещение вдоль X укорачивает кривую, что противоречит ее выбору. □

Отрицательная кривизна. Уравнение Якоби.

Пусть теперь риманово многообразие (M, g) имеет отделённую от нуля отрицательную кривизну. Рассмотрим семейство кривых $\gamma(t, s)$ с совпадающими концами, где $s \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ и все $\gamma(t, s)$ — геодезические.

Определение 11.23. Поле $X = \frac{\partial}{\partial s}$, перпендикулярное геодезическим $\gamma(t, 0)$ называется *полем Якоби*.

Теорема 11.15. (*Уравнение Якоби*). X — поле Якоби тогда и только тогда, когда $\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} X + R(\dot\gamma, X)\dot\gamma = 0$.

Доказательство: Напомним обозначения: $X = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}, \frac{\partial}{\partial t} = \dot\gamma$. Если все γ — геодезические, то $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0$. Тогда имеем $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} + 0 - R(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} + R(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s})\frac{\partial}{\partial t}$.

□

Отрицательная кривизна

Сформулируем главную теорему о многообразиях неположительной кривизны.

Теорема 11.16. *(Картан, Адамар, фон Мангольдт).* Пусть M^n – полное риманово многообразие неположительной гауссовой кривизны. Тогда универсальная накрывающая $\tilde M$ диффеоморфна $\mathbb{R}^n$.
Примеры: цилиндр и тор.

Определение 11.24. *Пространством типа* $K(\pi, 1)$ называется пространство, у которого все гомотопические группы старше первой тривиальны. Введем обозначение для первой гомотопической группы $\Gamma = \pi_1(M)$.

Поднимем метрику с M на $\tilde{M}$, получим многообразие $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Фундаментальная группа Γ действует свободно на $\tilde{M}$ как дискретная группа движений, и $M \simeq \tilde{M}/\Gamma \simeq \mathbb{R}^n/\Gamma$.

Итог. Так как $\mathbb{R}^n$ — это клетка, у полного риманова многообразия неположительной кривизны все высшие гомотопические группы равны 0.

Семинар

Навстречу теореме Топоногова.

Рассмотрим $Exp(B_r(O)) = B_r(m)$. Шар $B_r(m)$ является геодезически выпуклым для маленьких r, т.е. любые две его точки внутри можно соединить кратчайшей. Экспонента — это диффеоморфизм, который сохраняет радиальное расстояния. Рассмотрим естественный диффеоморфизм $\rho_s \colon B_r(m) \to B_{sr}(m)$, где $s \in (0, 1)$.

Теорема 11.17. Пусть $x \in B_r(m)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $K \leq 0$;
(2) $d(Exp^{-1}(A), Exp^{-1}(B)) \leq d(A, B),\ A, B \in B_r(m)$;
(3) $d(\rho_s(x), \rho_s(y)) \leq s \cdot d(x, y)$;
(4) $\frac{d(\rho_s(x), \rho_s(y))}{s}$ не убывает как функция от s.

Например, чтобы обнаружить отрицательную кривизну достаточно доказать, что средняя линия треугольника меньше половины основания.

Кривизна на компактной группе

Пусть задана биинвариантная метрика на группе Ли $SO(3)$. X, Y, Z — элементы алгебры Ли $Lie(G)$.

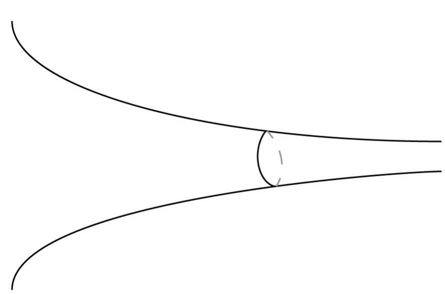
Теорема 11.18. Доказать, что $R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y]Z]$ в точке e.

Задача 11.51. Доказать, что в касательном пространстве T_e, а, значит, и на всей компактной группе $sec = K_{X,Y} = (R(X, Y)X, Y) = \frac{1}{4}|[X, Y]|^2$, если $|X| = |Y| = 1$ и $X \perp Y$ (X и Y рассматриваются как левоинвариантные векторные поля).

Лекция 12

Утверждение 12.17. M — компактно, $[\alpha]$ — свободный гомотопический класс петель на M. Тогда $[\alpha]$ содержит гладкую замкнутую геодезическую.

Замечание 12.6. Для некомпактного M это неверно.



Отрицательная кривизна

Утверждение 12.18. Если (M, g) полное, риманово многообразие неположительной кривизны, то $Exp_m \colon T_mM \to M$ — накрытие. Это вытекает из одной теоремы второй лекции и следующего утверждения:

Утверждение 12.19. Отображение $Exp \colon T_mM \to M$ невырождено, т.е. в любой точке $v \in T_mM$ его дифференциал $dExp_v$ невырожден.

Задача 12.52. Пусть $(dExp)_v w = 0$, тогда $w \perp v$.

Связь утверждения 12.19 с полями Якоби

□ *Идея*: построим семейство геодезических в касательном пространстве и с помощью экспоненты перенесем его на M, получив, таким образом, геодезическую вариацию на M.

Конструкция "Кусок пирога". Пусть M — многообразие. Выберем точку $m \in M$ и выпустим из точки $0 \in T_mM$ пучок геодезических $\tilde{\gamma}(s,t) = t(v + sw)$. Тогда на M получим вариацию $\gamma(s,t) = Exp_m(t(v + sw))$.

В точках Exp_v и $Exp(0)$ поле X скоростей вариации Якоби обнуляется, т.е. $\frac{\partial}{\partial s} = X(0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial s} = X(Exp_v) = 0$.

Но при $K \leqslant 0$, у полей Якоби не бывает двух нулей. Докажем это.

■ Напомним, что уравнение Якоби поля Якоби X выглядит так:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} X + R(\frac{\partial}{\partial \gamma}, X)\frac{\partial}{\partial \gamma} = 0.$$

Лемма 12.3. Если X — поле Якоби, то $(\mid X \mid^2)'' \leqslant 0$.

В самом деле: $(X, X)' = 2(X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X)$ (по правилу Лейбница). Распишем вторую производную, помня, что $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} X = -R(\frac{\partial}{\partial \gamma}, X)\frac{\partial}{\partial \gamma}$:
$(X, X)'' = (2(X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X))' = 2((\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X) + (X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma}} X)) = 2(\mid \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X \mid^2 - (R(\frac{\partial}{\partial \gamma}, X)\frac{\partial}{\partial \gamma}, X)) = 2(\mid \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X \mid^2 - sec(\frac{\partial}{\partial \gamma}, X) \cdot \mid X \mid^2)$.

Если секционная кривизна неположительна, все выражение неотрицательно, следовательно, длина кривой вдоль геодезической — неотрицательная выпуклая функция, у которой не бывает двух нулей. ■

Отсюда следует цепочка утверждений: 12.19 → 12.18 → 11.7.

Замечание 12.7. Если M полное риманово неодносвязное многообразие постоянной секционной кривизны -1, то оно изометрично $\Lambda^n/\pi_1(M)$, где группа π_1 вложена в группу $Isom(\Lambda^n)$ в качестве дискретной подгруппы группы движений пространства Лобачевского.

Неподвижные точки

Утверждение 12.20. В евклидовом пространстве любая конечная группа движений имеет неподвижную точку.

Доказательство: Пусть группа движений G имеет конечный порядок, т.е. $\mid G \mid < \infty$. Возьмем точку $x \in E^n$. Если она неподвижна, то доказывать нечего. В противном случае рассмотрим орбиту $\{Gx\} \in E^n$ и ее выпуклую оболочку $convex\{Gx\}$. Получится какой-то многогранник. Возьмем его центр тяжести p. Ясно, что p — это неподвижная точка группы G.

□

Теорема 12.19. (*Лагранж.*) Дан многогранник в E^n, $v_1, \ldots, v_m$ — его вершины. Ищем точку пространства E^n, в которой достигается $min \sum_{M \in E^n} d^2(M, v_i)$. Тогда эта точка будет центром масс многогранника.

Замечание 12.8. Это работает и в пространстве Лобачевского.

Симпатичная теорема

Теорема 12.20. (*Симпатичная теорема о неподвижной точке (обобщение теоремы Сингха).*)

- (M^{2m}, g) — компактное, полное, ориентированное;
- $secM^{2m} > 0$;
- $f \in IsomM^{2m}$ (дифференциал df сохраняет скалярное произведение);
- $f \in Isom^0 M^{2m}$ (сохраняет ориентацию).

Т.е.

$$m \in M \xrightarrow{f} gm \in M$$

$$T_m M \xrightarrow{df} T_{gm} M$$

и df сохраняет скалярное произведение: $(x, y)_{T_m} = (df(x), df(y))_{T_g m}$. Тогда f имеет неподвижную точку на M.

Задача 12.53. Вывести из *симпатичной теоремы* теорему Сингха.

Задача 12.54. Пусть $A \in O(2n-1)$, $\det A = 1$. Тогда существует x такой, что $Ax = x$, т.е. $\lambda = 1$ — собственное значение.

Задача 12.55. Доказать, что на компактном многообразии M $\inf_{x\in M} d(x, f(x)) = \min_{x\in M} d(x, f(x))$, причем минимум достигается в точке $p \in M$.

Задача 12.56. Назовем $\inf d(x, f(x))$ *функцией смещения.* Пусть p — точка минимума этой функции. Показать, что точки $p, f(p), f^2(p)$ лежат на одной геодезической, а именно, на продолжении кратчайшей, соединяющей p и $f(p)$.