Лекция 20-18. Условный экстремум. Лемма Морса

1 Доказательство теоремы 4 лекции 19

Доказательство Пусть $a + h \in \Gamma$. Имеем:

$$f(a + h) - f(a) = H_a(h) + o(|h|^2). \tag{1}$$

Положительно определенная квадратичная форма не только не отрицательна вне нуля, но и превосходит $\alpha|h|^2$ для некоторого $\alpha > 0$. Поэтому

$$f(a + h) - f(a) \geq \alpha|h|^2 + o(|h|^2) > 0$$

при малом $h \neq 0$. □

2 Доказательство теоремы 5 лекции 19

Доказательство Пусть, как и выше, $a+h \in \Gamma$. Тогда верна формула (1). Но функция $H_a(h)$ теперь не обязательно знакоопределна. Введем в $T_a\mathbb{R}^n$ Евклидову структуру. Тогда существует симметрический линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $H_a(h) = (h, Ah)$. Из $a + h \in \Gamma$ следует: $h = (x, \varphi(x))$. Тогда

$$H_a(h) = ((x, 0), A(x, 0)) + 2((x, 0), A(0, \varphi(x))) + ((0, \varphi(x)), A(0, \varphi(x))).$$

Два последних слагаемых равны $o(h)$ по теореме **??**. Следовательно,

$$H_a(h) = H_a(x, 0) + o(h). \text{ Но } H_a((x, 0)) \geq \alpha|x|^2,$$

поскольку форма $H_a|_{T_a\Gamma}$ положительно определена. Далее, по теореме **??**, $|x| = |h|(1+o(1))$. Поэтому $H_a(h) \geq \frac{\alpha}{2}|h|^2$. Дальнейшее доказательство – как в теореме **??**. □

3 Локальные нормальные формы аналитических функций одного переменного.

Теорема 1 *Ненулевая аналитическая функция одного переменного в окрестности любой точки в специальной системе координат является степенной.*

Замечание 1 *Показатель степени зависит от точки и полунепрерывен снизу.*

4 Лемма Морса

Теорема 2 *Пусть многочлен f имеет вид*

$$f(x) = \sum \varepsilon_j x_j^2 (1 + h_j(x)), \; h_j(x) = O(x). \tag{2}$$

Тогда функция f в некоторой окрестности нуля гладкой (и даже аналитической) заменой координат превращается в свой гессиан в этой точке плюс свободный член.

Аналогичная теорема верна для аналитических и бесконечно гладких функций, а также для функций конечной, но достаточно высокой гладкости. Мы сначала докажем лемму Морса для многочленов.

Наглядные следствия леммы Морса формулируются ниже.

5 Графики функций двух переменных в окрестности невырожденных критических точек.

Определение 1 *Критическая точка C^2-функции называется невырожденной (морсовской), если ее второй дифференциал в этой точке– невырожденная квадратичная форма.*

Седла, вершины и ямы.

Рис. 1: Линии уровня функции двух переменных в окрестности невырожденной критической точки а)экстремума б)седла.

6 Поверхности уровня функции трех переменных в окрестности морсовских критических точек.

По лемме Морса, в окрестности невырожденной критической точки, в специальной системе координат поверхности уровня функции трех переменных совпадают с квад-

Рис. 2: Графики функций двух переменных в окрестности критических точек: a)локального максимума b)локального минимума c)седла

рикам: эллипсоидами, конусами, одно и двуполостными гиперболоидами. При переходе значения функции через критическое, топология поверхности уровня меняется: однополостный гиперболоид превращается в двуполостный.

Рис. 3: a)Окрестность локального экстремума b)Окрестность седла