Лекция 21-18. Лемма Морса

1 Аналитические функции многих переменных.

Определение 1 *Аналитическая функция нескольких переменных (вещественных или комплексных)–это функция, заданная в открытой области, которая в окрестности каждой точки этой области разлагается в сходящийся к ней ряд Тейлора.*

Пример 1 *1)Многочлены 2)Произведения аналитических функций одной переменной от разных переменных: $f(x)g(y)$ 3) Суперпозиции аналитической функции одной переменной и многочлена: $f(x+y)$ и т.д.*

Теорема 1 *Если функция $(\mathbb{Z}^+)^n \to \mathbb{C},\ k \mapsto a_k$, мажорируется геометрической прогрессией:*

$$|a_k| \leq Cq^{|k|},$$

то ряд Тейлора

$$\sum = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^+)^n} a_k z^k$$

сходится в полидиске $|z_j| < \frac{1}{q}$.

Доказательство Ряд $\sum$ мажорируется рядом $\sum^+ = C \prod \frac{1}{1-qz_j}$. $\square$ [Все эти результаты в листок]

2 Лемма Морса для аналитических функций двух переменных.

Теорема 2 (Лемма Морса) *Аналитическая функция двух переменных в окрестности невырожденной критической точки гладкой (и даже аналитической) заменой координат превращается в свой гессиан в этой точке плюс свободный член.*

Доказательство В силу невырожденности гессиана в нуле,

$$f(x,y) = x^2 + \varepsilon y^2 + \text{ старшие члены },\ \varepsilon = \pm 1$$

Старшие члены делятся либо на x^2, либо на y^2. Поэтому

$$f(x,y) = x^2(1 + h_1(x,y)) + \varepsilon y^2(1 + h_2(x,y)),\ \varepsilon = \pm 1.$$

Положим:
$$H(x,y) = (X,Y) = (x\sqrt{1+h_1(x,y)}, y\sqrt{1+h_2(x,y)}).$$
Функции X и Y гладкие (и даже аналитические);
$$dH(0) = E,\ \det dH(0) = 1.$$
Следовательно, замена H в окрестности нуля обратима.
$$G(X,Y) = f \circ H^{-1}(X,Y) = X^2 + Y^2.$$
□

3 Лемма Морса для аналитических функций многих переменных.

Теорема 3 *Пусть аналитическая функция f имеет вид*
$$f(x) = \sum \varepsilon_j x_j^2 (1 + h_j(x)),\ \ h_j(x) = O(x). \tag{1}$$
Тогда функция f в некоторой окрестности нуля гладкой (и даже аналитической) заменой координат превращается в свой гессиан в этой точке плюс свободный член.

Доказательство $X_j = x_j\sqrt{1+h_j(x)}$. □

4 Уничтожение полилинейных членов.

Не всякая аналитическая функция с критической точкой 0 и невырожденным гессианом в этой точке имеет вид (1). Но всякая такая функция к этому виду приводится.

Лемма 1 *Аналитическая функция с морсовой критической точкой* 0 *невырожденной положительной заменой приводится к виду* (1)*.*

Доказательство Доказательство похоже на выделение полного квадрата. □