

## Задачи по НИС "Математика физических явлений"

На "отлично" необходимо решить по одной задаче из каждого раздела. Задачи сдаются устно. При сдаче задач могут быть дополнительные вопросы по другим задачам для уточнения оценки.

### Раздел 1

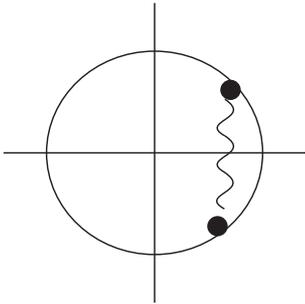


Рис. 1: Задача 1б

1а. Написать уравнения Эйлера-Лагранжа, описывающие свободное движение частицы на параболоиде  $z = x^2 + y^2$ . Получить дифференциальное уравнение в цилиндрических координатах для уравнения "прямой" (траектории свободного движения)  $z(\phi)$  (или  $\phi(z)$ ). Определить движение вблизи точки поворота по  $z$  и в асимптотике больших  $z$ .

1б. Составить лагранжево описание (в угловых переменных) двух частиц, свободно движущихся по кольцу радиуса  $R$  и связанных пружиной произвольной длины  $l$  (в нерастянутом состоянии). Исследовать уравнения движения. Пружина соединяет частицы по прямой, а не по кольцу.

### Раздел 2

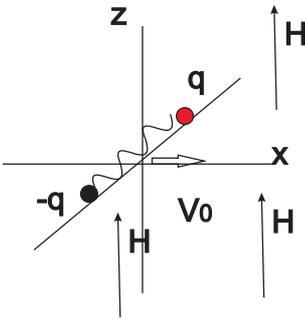


Рис. 2: Задача 2а

2а. Описать движение 2-частиц с одинаковыми массами  $m$  и противоположными зарядами, связанных пружиной, когда они влетают в область однородного магнитного поля (полупространство  $x > 0$ ) с начальной скоростью  $V_0$ , как показано на рисунке. (Кулоновским взаимодействием между зарядами пренебречь, в начальный момент пружина не напряжена и направлена по  $Y$ ).

2б. То же, если заряды связаны жесткой штангой и в начальный момент штанга направлена по оси  $Z$ .

### Раздел 3

3а. Провести прямое вычисление (в сферических координатах) полного потока электрического поля одиночного заряда через сферу, если заряд смещен относительно центра сферы на произвольную величину.

3б. Провести прямое вычисление (в декартовых координатах) полного потока электрического поля одиночного заряда через две (бесконечные) параллельные плоскости, если заряд находится в произвольном месте между плоскостями.

### Раздел 4

4а. Найти распределение заряда на плоской поверхности проводника, если параллельно поверхности на расстоянии  $d$  от нее расположена равномерно заряженная нить (прямая) с плотностью заряда на единицу длины  $\sigma$ . Вычислить полный заряд на поверхности проводника на единицу длины нити.

4б. Написать выражение для силы, с которой равномерно заряженная палочка заданной длины и пренебрежимо малого диаметра, расположенная горизонтально поверхности на расстоянии  $d$  от нее, притягивается к поверхности диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

## Раздел 5

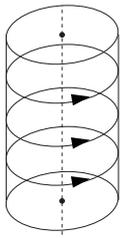


Рис. 3: Задача 5а

5а. Найти распределение магнитного поля внутри и вне бесконечного проводящего цилиндра радиуса  $R$ , по которому течет равномерный круговой ток с плотностью  $j$  на единицу длины цилиндра. Найти направление и зависимость  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . Попробовать применить формулы  $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}j$  и  $\oint \mathbf{A}d\mathbf{l} = \int \mathbf{H}d\mathbf{S}$  к различным контурам.

5б. Определить величину напряженности магнитного поля на оси кольца с током  $j$  из выражения для векторного потенциала такого кольца и воспользовавшись формулой  $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$

## Раздел 6

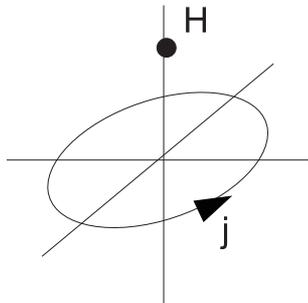


Рис. 4: Задача 5б

6. Вычислить  $\text{rot}\mathbf{v}$  для следующих случаев распределения скорости течения в пространстве:

1. линейно растущей от дна реки скорости однородного потока  $\mathbf{v}(r) = v_x^0 \cdot z$
2. Обычного вращения вокруг оси  $z$  с  $v_\phi(r) = \omega \cdot r$
3. Вихревого вращения сверхтекучей жидкости вокруг оси  $z$  с  $v_\phi(r) = \kappa/r$

Прямым вычислением проверить теорему Стокса:  $\oint \mathbf{v}d\mathbf{l} = \int \text{rot}\mathbf{v}d\mathbf{S}$  (для соответствующих каждому случаю простому для вычислений выбору контуров)

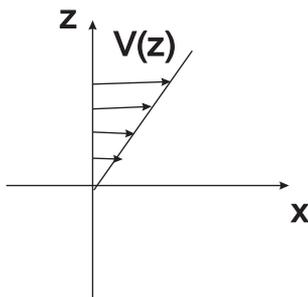


Рис. 5: Задача 6.1

## Раздел 7

7. Определить закон изменения магнитного поля, параллельного плоской поверхности сверхпроводника ( $z=0$ ) вглубь сверхпроводника. Воспользоваться связью тока с вектор потенциалом в сверхпроводнике:  $\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\mathbf{A}$  и уравнением Максвелла  $\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ . Ось  $z$  перпендикулярна поверхности сверхпроводника, поле однородно вдоль поверхности и направлено по оси  $x$ , то есть, есть только одна компонента поля  $B_x(z)$ , на поверхности сверхпроводника имеющая величину  $B_0$ . Найти направление и величину тока, текущего в сверхпроводнике.

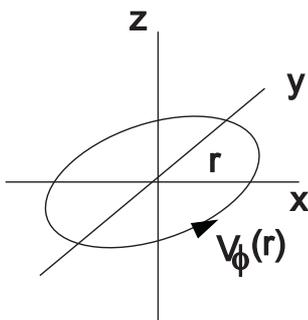


Рис. 6: Задача 6.2,3