

**Группы и алгебры Ли II**  
**Семинар 17.05**

**Задача 1.** Найдите количество элементов во всех группах Вейля систем корней ранга 2.

**Задача 2.** Нарисуйте решётки весов и корней для систем корней  $A_1$  и  $A_2$ . Отметьте простые корни и фундаментальные веса.

**Задача 3.** Решите предыдущую задачу в случае  $B_2$ .

**Задача 4.** Для каждой из систем корней  $R \subset E$  ранга 2 нарисуйте двойственную систему корней, состоящую из кокорней  $\alpha^\vee \in E^*$  ( $\alpha \in R$ ), определённых формулой

$$\alpha^\vee(\beta) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

Кокорни  $\alpha^\vee$  иногда обозначаются через  $h_\alpha$ .

**Задача 5.** а) Опишите приведенные разложения длинного элемента группы Вейля системы корней  $B_2$  и соответствующие им нормальные порядки положительной системы корней.

б) Опишите порядок Брюа группы Вейля системы корней  $B_2$

**Задача 6.** Докажите, что группы Вейля систем корней ранга 2 задаются образующими  $s_1, s_2$ , такими что  $s_1^2 = s_2^2 = 1$  (для всех типов) и дополнительным соотношением  $(s_1 s_2)^{m+1} = 1$ , где  $m = 1$  для  $A_1 \sqcup A_1$ ,  $m = 2$  для  $A_2$ ,  $m = 3$  для  $B_2$ ,  $m = 4$  для  $G_2$ .