

Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского L^2 . Группа движений плоскости L^2

На лекциях рассмотрена модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского L^2 , в которой плоскость L^2 есть внутренность единичного круга с центром в нуле 0. Граница круга - единичная окружность ω , называемая *абсолютом*. Прямые в L^2 - открытые хорды окружности ω (то есть хорды с исключенными концами). Введено расстояние $d(A, B)$ между точками A и B в L^2 по формуле $d(A, B) = \frac{1}{2} |\ln(ABXY)|$, где X и Y - концы хорды абсолюта ω , проходящей через A и B . Единичный круг $\bar{L}^2 = L^2 \cup \omega$, содержащий плоскость L^2 , считается лежащим в евклидовой плоскости E^2 , которая дополнена добавлением несобственной проективной прямой $\mathbb{RP}_\infty^1$ до вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$. Группой движений $O(L^2)$ плоскости L^2 называется группа проективных преобразований проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$, сохраняющих L^2 , то есть $O(L^2) = \{g \in PGL(3, \mathbb{R}) \mid g(L^2) = L^2\}$. *Договоренность об обозначениях*: прямую в L^2 как открытую хорду с концами X и Y , проходящую через две различные точки A, B в L^2 , будем обозначать через AB , либо через XY , а содержащую ее проективную прямую в $\mathbb{RP}^2$ - через $\overline{AB}$, либо через $\overline{XY}$. Для различных точек $C, D \in \mathbb{RP}^2$ будем обозначать через $\overline{CD}$ проходящую через них проективную прямую, а также обозначать $CD = \overline{CD} \cap L^2$, если последнее пересечение непусто.

Задача 1. Рассмотрим произвольную проективную прямую $l \subset \mathbb{RP}^2$, пересекающую ω в двух различных точках X и Y . Через $Po(l)$ здесь и ниже будем обозначать полюс прямой l относительно окружности ω . Рассмотрим проективное преобразование $g \in PGL(3, \mathbb{R})$ - инволюционную гомологию I_l с неподвижной прямой l и неподвижной точкой $O = Po(l)$. (По определению, для любой точки $X \in \mathbb{RP}^2$, отличной от O и не лежащей на l , $I_l(X) = A'$ - такая точка, что пара точек A, A' гармонически делит пару точек O, O' , где $O' = \overline{OA} \cap l$. (Инволюция I_l уже встречалась в задаче 5 семинара 3.) Докажите, что $I_l \in O(L^2)$. (I_l называется *отражением в прямой l* .)

Задача 2. Докажите, что действие группы $O(L^2)$ на L^2 транзитивно, то есть для любых точек $A, B \in L^2$ существует движение $g \in O(L^2)$ такое, что $B = g(A)$.

Задача 3. Пусть l - прямая в L^2 . Всякая точка $A \in l$ делит прямую l на два луча с началом в точке A , скажем, $[AX)$ и $[AY)$, где $\{X, Y\} = \bar{l} \cap \omega$. На произвольной прямой $m \neq l$ через точку A возьмем любой из лучей с началом в A , скажем, $[AZ)$. Прямая m называется *перпендикуляром* к прямой l в точке A , если существует движение $g \in O(L^2)$, которое переводит угол $\widehat{XAZ}$ в угол $\widehat{YAZ}$. а) Докажите, что перпендикуляр m к прямой l в точке A единственен - это прямая OA , где $O = Po(l)$. б) Докажите, что две непересекающиеся прямые l и m в L^2 имеют единственный общий перпендикуляр n , где $\bar{n}$ - полярная точка $\bar{l} \cap \bar{m}$ относительно ω .

Задача 4. Пусть $l = XY$ и $m = ZW$ - различные прямые в L^2 , пересекающиеся в точке A , где $X, Y, Z, W \in \omega$. Прямая n в L^2 , проходящая через точку A и лежащая внутри пары противоположных углов $\widehat{XAZ}$ и $\widehat{YAW}$, называется *биссектрисой* этой пары углов, если существует такое движение $g \in O(L^2)$ с неподвижной прямой n , что $g(l) = m$. Докажите, что биссектриса s пары противоположных углов $\widehat{XAZ}$ и $\widehat{YAW}$ существует, единственна, и находится следующим образом: $n = AB$, где $B = \overline{XW} \cap \overline{YZ}$.

Задача 5. Для двух различных точек A и B пусть C - середина отрезка AB (в смысле данного выше определения расстояния между точками в L^2). Докажите, что C строится следующим образом. Пусть $P = Po(AB)$. Прямые $\overline{PA}$ и $\overline{PB}$ пересекают абсолют ω в точках A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Из двух пар прямых A_1B_1, A_2B_2 и A_1B_2, A_2B_1 выберем пару пересекающихся прямых (такая пара единственна в L^2 !). Точка их пересечения есть искомая точка C .

Дополнительные задачи к семинару 17

Задача 1. Докажите, что группа $O(L^2)$ изоморфна $PGL(2, \mathbb{R})$. Это утверждение вытекает из решения следующих задач.

а) Обозначим через $Aut \omega$ группу всех преобразований окружности ω . Докажите, что всякое движение $g \in O(L^2)$, рассматриваемое как элемент группы $PGL(3, \mathbb{R})$ проективных преобразований плоскости $\mathbb{RP}^2$, отображает окружность ω биективно на себя, то есть мы имеем корректно определенный гомоморфизм $f : O(L^2) \rightarrow Aut \omega$.

б) Пусть $G = \text{im} f$. Докажите, что $f : O(L^2) \rightarrow G$ - изоморфизм.

в) Постройте изоморфизм $\varphi : G \xrightarrow{\sim} PGL(2, \mathbb{R})$.

Отсюда вытекает искомый изоморфизм групп $h = \varphi f : O(L^2) \simeq PGL(2, \mathbb{R})$.

Задача 2. Докажите, что отражения I_l в прямых порождают группу $O(L^2)$. Это утверждение вытекает из решения следующих задач.

а) При изоморфизме $h : O(L^2) \simeq PGL(2, \mathbb{R})$, построенном в задаче 1, отражениям I_l соответствуют инволюции проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ с двумя неподвижными точками.

б) Инволюции проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ с двумя неподвижными точками порождают группу $PGL(2, \mathbb{R})$.

Дополнительные задачи к семинару 17

Задача 1. Докажите, что группа $O(L^2)$ изоморфна $PGL(2, \mathbb{R})$. Это утверждение вытекает из решения следующих задач.

а) Обозначим через $Aut \omega$ группу всех преобразований окружности ω . Докажите, что всякое движение $g \in O(L^2)$, рассматриваемое как элемент группы $PGL(3, \mathbb{R})$ проективных преобразований плоскости $\mathbb{RP}^2$, отображает окружность ω биективно на себя, то есть мы имеем корректно определенный гомоморфизм $f : O(L^2) \rightarrow Aut \omega$.

б) Пусть $G = \text{im} f$. Докажите, что $f : O(L^2) \rightarrow G$ - изоморфизм.

в) Постройте изоморфизм $\varphi : G \xrightarrow{\sim} PGL(2, \mathbb{R})$.

Отсюда вытекает искомый изоморфизм групп $h = \varphi f : O(L^2) \simeq PGL(2, \mathbb{R})$.

Задача 2. Докажите, что отражения I_l в прямых порождают группу $O(L^2)$. Это утверждение вытекает из решения следующих задач.

а) При изоморфизме $h : O(L^2) \simeq PGL(2, \mathbb{R})$, построенном в задаче 1, отражениям I_l соответствуют инволюции проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ с двумя неподвижными точками.

б) Инволюции проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ с двумя неподвижными точками порождают группу $PGL(2, \mathbb{R})$.

Дополнительные задачи к семинару 17

Задача 1. Докажите, что группа $O(L^2)$ изоморфна $PGL(2, \mathbb{R})$. Это утверждение вытекает из решения следующих задач.

а) Обозначим через $Aut \omega$ группу всех преобразований окружности ω . Докажите, что всякое движение $g \in O(L^2)$, рассматриваемое как элемент группы $PGL(3, \mathbb{R})$ проективных преобразований плоскости $\mathbb{RP}^2$, отображает окружность ω биективно на себя, то есть мы имеем корректно определенный гомоморфизм $f : O(L^2) \rightarrow Aut \omega$.

б) Пусть $G = \text{im} f$. Докажите, что $f : O(L^2) \rightarrow G$ - изоморфизм.

в) Постройте изоморфизм $\varphi : G \xrightarrow{\sim} PGL(2, \mathbb{R})$.

Отсюда вытекает искомый изоморфизм групп $h = \varphi f : O(L^2) \simeq PGL(2, \mathbb{R})$.

Задача 2. Докажите, что отражения I_l в прямых порождают группу $O(L^2)$. Это утверждение вытекает из решения следующих задач.

а) При изоморфизме $h : O(L^2) \simeq PGL(2, \mathbb{R})$, построенном в задаче 1, отражениям I_l соответствуют инволюции проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ с двумя неподвижными точками.

б) Инволюции проективной прямой $\mathbb{RP}^1$ с двумя неподвижными точками порождают группу $PGL(2, \mathbb{R})$.