Семинар 18.
Модель Кэли-Клейна плоскости Лобачевского L^2

Напомним данную в лекциях интерпретацию модели Кэли-Клейна плоскости Лобачевского L^2 в терминах гиперболического пространства $E^{2,1}$. Под *гиперболическим пространством* $E^{2,1}$ понимается векторное пространство $\mathbb{R}^3$ с квадратичной формой $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ сигнатуры $(2,1)$. (Здесь (x_1, x_2, x_3) - координаты в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$.) Через $(\ ,\ )$ будем обозначать соответствующее (псевдоевклидово) скалярное произведение: $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ конус K векторов с отрицательным скалярным квадратом: $K = \{x \in \mathbb{R}^3 | (x^2) < 0\}$. (Здесь и ниже $(x^2) := (x,x)$.) Плоскость Лобачевского L^2 реализуется как проективизация конуса $K \cup \{0\}$: $L^2 = P(K \cup \{0\})$, рассматриваемая как подмножество вещественной проективной плоскости $\mathbb{RP}^2 = P(\mathbb{R}^3)$. Проективные координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ точки в L^2 получаются из вышеуказанных координат (x_1, x_2, x_3) векторов в $\mathbb{R}^3$. Для двух точек $A = \langle x \rangle$ и $B = \langle y \rangle$ в L^2 имеет место следующая формула для гиперболического расстояния между ними: $\mathrm{ch}(d(A,B)) = \frac{-(x,y)}{\sqrt{-(x^2)}\sqrt{-(y^2)}}$. Эта формула будет получена на лекциях; ею можно пользоваться в задачах. Кроме того, на лекциях сформулированы следующие теоремы косинусов и синусов для треугольника ABC:

$$\mathrm{ch}(c) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)\cos A, \quad \cos A = -\cos B\cos C + \sin B \sin C\,\mathrm{ch}(a), \quad \frac{\mathrm{sh}(a)}{\sin A} = \frac{\mathrm{sh}(b)}{\sin B} = \frac{\mathrm{sh}(c)}{\sin C}.$$

Здесь $a,\ b,\ c$ - гиперболические длины сторон, противоположных вершинам $A,\ B,\ C$, а гиперболические углы при этих вершинах обозначены теми же буквами $A,\ B,\ C$.

Из лекций также известно, что сумма углов треугольника в L^2 меньше π.

Задача 1. В L^2 найдите расстояние от точки $(1:0:2)$ до
а) точки $(0:1:2)$;
б) прямой $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Задача 2. Остроуголен, тупоуголен или прямоуголен треугольник со сторонами 3, 4, 5 в L^2?

Задача 3. Верна ли в L^2 теорема о том, что против бóльшего угла треугольника лежит бóльшая сторона?

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ в L^2 попарно равны противоположные стороны. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются в L^2 (то есть расходятся).

Дополнительные задачи к семинару 18

Задача 1. В L^2 найдите геометрическое место точек, равноудаленных от:
а) двух расходящихся прямых;
б) двух параллельных прямых. (Напомним, что две различные прямые в L^2 называются *параллельными*, если их продолжения в $\mathbb{RP}^2$ пересекаются на абсолюте.)

Задача 2. Верна ли в L^2 теорема о том, что вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, – прямой?

Задача 3. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам гиперболического треугольника пересекаются в одной точке в $\mathbb{RP}^2$ (лежащей, возможно, вне L^2).

Задача 4. Докажите, что медианы гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.