ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ

Ю.М.БУРМАН

1. (1 курс) Инверсии и спуски.
   Количество перестановок с k инверсиями равно количеству перестановок с общим спуском k. Более трудный вариант (1–2 курс): количество перестановок с k инверсиями и общим спуском ℓ зависит от k и ℓ симметрично.
2. (1 курс) Тождество Роджерса–Рамануджана.
   Количество представлений натурального числа в виде суммы целых положительных слагаемых, среди которых нет соседних чисел, равно количеству представлений того же числа в виде суммы слагаемых, дающих при делении на 5 остаток 1 или 4. Пример: $6 = 5+1 = 4+2$ — три представления, и $6 = 4+1+1 = 1+1+1+1+1+1$ — тоже три представления.
3. (2 курс) Теорема Бриона и двойственность Эрхарда–Макдональда.
   Количество точек с целыми координатами, лежащих в растянутом в $k = 1, 2, \dots$ раз выпуклом многограннике с целочисленными вершинами, задается значением $P(k)$ определенного многочлена P (зависящего от многогранника). Значение $P(-k)$ того же многочлена равно, с точностью до знака, количеству точек с целыми координатами, лежащих *внутри* этого многогранника. Доказательство этого факта использует суммирование всюду расходящихся геометрических прогрессий. Исследовательская часть (2–3 курс): попытаться получить обобщение этой теоремы, в котором вершины многогранника не обязательно имеют целые координаты.
4. (1–2 курс) Матричная теорема о деревьях.
   Матрица Лапласа — матрица $n \times n$, на (i, j)-ом месте которой при $j \neq i$ стоит переменная w_{ij}, а при $j = i$ (на диагонали) — выражение $-\sum_{k \neq i} w_{ik}$. Теорема утверждает, что диагональный минор $(n-1) \times (n-1)$ матрицы Лапласа равен сумме всех “древовидных” мономов от w_{ij}. Теорема имеет несколько непохожих друг на друга доказательств (так что в принципе по этой теме возможно несколько курсовых работ), а также ряд обобщений (на недиагональные миноры миноры меньшего размера, на другие системы корней и т.п.).
5. (2 курс) Следствия матричной теоремы о деревьях.
   Теорема о полуплоскости для электрических цепей, теория случайных блужданий, матричная теорема для высших перестановочных представлений симметрической группы.
6. (3–4 курс) Высшие детерминанты.
   Высшие аналоги матричной теоремы о деревьях. Дискретное интегрирование по путям. Бесконечномерные пределы (тут большинство результатов еще не получено).
7. (1–2 курс) $\mathrm{SO}(3) = \mathbb{R}P^3$.
   Существует несколько способов отождествить группу вращений трехмерного пространства (это и есть $\mathrm{SO}(3)$) с трехмерным проективным пространством. Можно исследовать, во что переходят при этом отождествлении подмножества двух пространств, например, проективные прямые или множества поворотов вокруг заданной оси.
8. (2 курс) Срезанный куб окружности.
   Множество наборов из не более трех точек на окружности гомеоморфно трехмерной сфере. причем наборы, содержащие только одну точку, образуют в трехмерной сфере узел “трилистник”.