Задачи для экзамена 29 мая.

(1 – 2 задачи на 2 часа).
Начало экзамена в 17.00.
Смысл всех слов и обозначений, встречающихся в условиях,
я постараюсь объяснить на лекциях.

Симметрия оператора кривизны.

1. Доказать, что $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$.

Восстановление связности Леви–Чивита по метрике.

2. Докажите, что

$$(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2}\{\frac{\partial}{\partial X}(Y,Z) + \frac{\partial}{\partial Y}(Z,X) - \frac{\partial}{\partial Z}(X,Y) - ([X,Z],Y) - ([Y,Z],X) - ([X,Y],Z)\}$$

для трех векторных полей $X,\ Y,\ Z$.

Трудная задача 3.

3. Из сферы S^3 выбросим большую окружность. Можно ли на оставшемся месте ввести полную риманову метрику постоянной отрицательной кривизны (-1)?

4. Пусть M замкнутое риманово многообразие неположительной кривизны $K \leq 0$. Может ли фундаментальная группа $\pi_1(M)$ быть конечной?

5. Доказать тождество Картана для 1–формы $\omega \in \Omega^1(M)$

$$d\omega(X,Y) = \frac{\partial}{\partial X}\omega(Y) - \frac{\partial}{\partial Y}\omega(X) - \omega([X,Y]),$$

где $X,\ Y$ — векторные поля, d — дифференциал де Рама.

Картановские вычисления на группе Ли.

G — группа Ли, $Lie(G)$ — ее алгебра Ли, $e_1, \dots, e_n$ — базис в $Lie(G)$, рассматриваемый как левоинвариантный подвижный репер, ω^i — двойственный подвижный левоинвариантный репер 1–форм на группе G, C^i_{jk} — структурные константы алгебры Ли, т.е.

$$[e_j, e_k] = \sum C^i_{jk} e_i.$$

6. Доказать, что $d\omega^i = -\frac{1}{2}\sum C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$.

7. Если группа G обладает биинвариантной метрикой, то $C^i_{jk} + C^k_{ji} = 0$.

   (Совет: нужно доказать, что $([X,Y],Z) + (Y,[X,Z]) = 0$).

8. Пусть ∇ — связность на группе G и

$$\nabla_X e_j = \sum \omega^i_j(X) e_i.$$

   Доказать, что $\omega^i_j = \frac{1}{2}\sum C^i_{kj}\omega^k$.

9. Доказать, что связность Леви–Чивита биинвариантной метрики на группе G задается на левоинвариантных векторных полях формулой $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

О матрицах связности и кривизны Ω в теории подвижного репера.

10. Доказать, что $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$.

11. Доказать тождество: $d\omega = \omega \wedge \omega - \Omega$, где ω — матрица симметричной связности, а Ω — матрица кривизны этой связности.

<u>Конструкция из линейной алгебры.</u>

12. Доказать, что оператор Римана кривизны на римановом многообразии M можно рассматривать как самосопряженный оператор $R\colon \Lambda^2 TM \to \Lambda^2 TM$.

<u>Просто так.</u>

13. Доказать, что на поверхности кренделя можно ввести метрику постоянной отрицательной кривизны (-1).

14. Можно ли на поверхности тора ввести метрику постоянной положительной кривизны $\frac{1}{4}$?

15. Можно ли на поверхности кренделя ввести метрику положительной кривизны?

16. Пусть M — компактное, четномерное, неориентируемое риманово многообразие положительной кривизны (пример?). Доказать, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.

<u>Из жизни расслоений.</u>

17. Объясните, как построить локально–тривиальное расслоение $\mathbb{R}P^3 \to S^2$ со слоем окружность.

18. Объясните, как построить локально–тривиальное расслоение $S^3 \to S^2$ со слоем окружность.

<u>Плоские связности и расслоения.</u>

19. Является ли касательное расслоение TS^2 плоским?

20. Можно ли на касательном расслоении TS^3 ввести плоскую связность? Если да, то сколько плоских связностей можно ввести на этом расслоении?