

A. K. Погребков

**Элементарное введение
в теорию
интегрируемых дифференциальных
уравнений**

Высшая школа экономики
2-й семестр 2017/2018 гг.

Содержание

1 Лекция	3
1.1 О лошадях	3
1.1.1 Первое наблюдение “волны переноса”	3
1.1.2 Уравнение Кортевега–де Фриза – баланс дисперсии и нелинейности	3
1.1.3 Развитие теории нелинейных уравнений	5
1.2 Многомерные уравнения.	6
2 Лекция	7
2.1 Общая схема метода обратной задачи	7
3 Лекция	9
3.1 Решения Йоста	9
3.2 Асимптотическое поведение решений Йоста по k	11
4 Лекция	12
4.1 Матрица монодромии	12
4.2 Свойства элементов матрицы монодромии.	13
5 Лекция	16
5.1 Интерпретация в терминах данных рассеяния	16
5.2 Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля	17
5.3 Дискретный спектр	18
6 Лекция.	20
6.1 Простота нулей $a(k)$	20
6.2 Формула Сохоцкого–Племеля.	20
6.3 Дисперсионное соотношение.	21
7 Лекция.	23
7.1 “Явные” формулы для κ_n и b_n	23
7.2 Данные рассеяния.	24
7.3 Обратная задача: задача Римана–Гильберта	25
8 Лекция.	28
8.1 Временная эволюция.	28
8.2 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.	29
9 Лекция.	31
9.1 Интегралы движения.	31
10 Лекция.	34
10.1 Солитонные решения: $r \equiv 0$	34
10.2 Односолитонное решение, $N = 1$	35
10.3 Двусолитонное решение, $N = 2$	36
11 Лекция.	38
11.1 Асимптотика по t N -солитонных решений	38

12 Лекция.	41
12.1 Скобки Гарднера и Магри	41
13 Лекция (А.В.Ильина)	43
13.1 Псевдодифференциальные операторы	43
13.2 Интегралы движения и коэффициенты Гельфанд-Дикого	45
14 Лекция. Коммутаторные тождества	48
14.1 Коммутаторные тождества	48
14.2 Операторы A и B	49
15 Лекция.	51
15.1 Обратная задача (процедура одевания)	51
15.2 Старшие эволюции оператора K	52
15.3 Система Захарова–Шабата	52
16 Лекция	54
16.1 Свойства символа оператора B	54
16.2 Уравнение КПИ и формулировка в терминах решений Йоста	54
16.3 Редукция к уравнению КdФ	56
17 Вопросы к зачету	57

1 Лекция

1.1 О лошадях

1.1.1 Первое наблюдение “волны переноса”

Первое наблюдение уединенной волны в 1834г. сделал шотландский ученый и инженер Дж. Скотт Рассел (1808–1882). Окончив Университет Глазго в 16 лет, он работал в Отделении естественной истории в Эдинбурге, где изучал пропускную способность канала Юнион. Вот в процессе этих исследований он доложил о следующем:

“Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась – вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии бурного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатилась вперед с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фути до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгиба канала. Так в августе месяце 1834г. произошла моя первая встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса (The Wave of Translation) ...”

В 1872г. Буссинеску предложил уравнение, описывающее длинные волны на поверхности жидкости и показал, что оно имеет решение типа уединенной волны. Однако реальный прорыв произошел в 1895г.: Кортевег и де Фриз получили уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала (для невязкой, несжимаемой, однородной жидкости в постоянном поле тяжести)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1)$$

Они показали, что это уравнение обладает уединенной волной, т.е. решением вида

$$u(x, t) = \frac{-2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)} \quad (1.2)$$

(отклонение уровня воды от стационарного для дальнейшего удобства обозначено $-u$), где параметр κ – произвольная положительная константа, не фиксированная уравнением. Именно эту волну и наблюдал Рассел.

1.1.2 Уравнение Кортевега–де Фриза – баланс дисперсии и нелинейности

Рассмотрим волновой процесс в предположении

1. отсутствия диссипации,

2. отсутствия дисперсии,
3. малости амплитуды колебаний φ_-

Тогда волновой процесс описывается волновым уравнением:

$$\partial_t^2 \varphi_- = c^2 \partial_x^2 \varphi_- . \quad (1.3)$$

Диссипативные системы – такие системы у которых механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) убывает, переходя в другие формы, например в теплоту (dissipatio – рассеивание, исчезновение (лат.)).

Дисперсия (dispersio – рассеяние (лат.)) – зависимость фазовой скорости гармонической волны от ее частоты. Гармоническая (плоская) волна:

$$e^{i\omega t - ikx} , \quad (1.4)$$

где ω – частота, k – волновой вектор,

$$\omega(k) = kv(k) \quad (1.5)$$

$v(k)$ – фазовая скорость. Групповая скорость $= \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Дисперсионное соотношение – уравнение, связывающее частоту колебаний ω и волновой вектор k : $\omega = \omega(k)$.

Диссипация приводит к затуханию волны, дисперсия – к расплыванию и перемешиванию пакетов, а нелинейные эффекты – к укручению фронтов. Эффект нелинейности хорошо демонстрирует бездисперсное уравнение КдФ:

$$u_t = 6uu_x , \quad (1.6)$$

которое решается следующим образом (см. задачу 1). Найдем s из уравнения

$$s = x + 6tu_0(s) ,$$

где $u_0(x)$ – начальное данное. Тогда решение задачи Коши для (1.6) дается посредством

$$u(t, x) = u_0(s(t, x)) . \quad (1.7)$$

Рассмотрим как можно учесть малую нелинейность и дисперсию. Выделим из общего решения волнового уравнения $\psi = \psi_1(x - ct) + \psi_2(x + ct)$ волну, распространяющуюся, скажем, направо:

$$\partial_t \varphi_- + c\partial_x \varphi_- = 0 . \quad (1.8)$$

Учтем нелинейную поправку к фазовой скорости: $v(k) = v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + \dots$, так что закон дисперсии принимает вид $\omega = ck - \beta k^3$ (член порядка k^2 отсутствует, поскольку гармоническая волна должна удовлетворять дифференциальному уравнению с вещественными коэффициентами). Такой закон дисперсии дается уравнением:

$$\partial_t \varphi_- + c\partial_x \varphi_- + \beta \partial_x^3 \varphi_- = 0 \quad (1.9)$$

Теперь введем нелинейность. Уравнения (1.8) и (1.9) имеют вид законов сохранения: $\partial_t \psi + \partial_x j = 0$, т.е. $\int dx \psi(x, t)$ сохраняется во времени. Добавим первую квадратичную поправку к j , что сохранит это свойство: $j = c\psi + \beta \partial_x^2 \psi + \frac{\alpha}{2} \psi^2$. Тогда $\partial_t \psi + c\partial_x \psi + \beta \partial_x^3 \psi + \alpha \psi \partial_x \psi = 0$, что после замены $x \rightarrow x + ct$, $\psi = -\frac{\beta}{\alpha} u$ дает уравнение КдФ.

1.1.3 Развитие теории нелинейных уравнений

В 1954г. Ферми, Паста и Улам, изучая на ЭВМ поведение цепочки нелинейных осцилляторов (что можно рассматривать как численное моделирование КдФ), обнаружили аномально медленную стохастизацию этой этой динамической системы.

В 1958г. Сагдеев показал, что в плазме могут распространяться солитоны, а Гарднер и Морикава в 1960 г. показали, что уравнения, описывающие сильную плазму аналогичны КдФ.

В 1965г. Забуски и Крускал, экспериментируя с численными решениями КдФ показали, что солитоны сталкиваются упруго и ввели само понятие “солитон”. Затем были открыты бесконечные серии законов сохранения.

Мы будем называть солитонами любые (экспоненциально) локализованные нелинейные волны, которые взаимодействуют с произвольными локальными возмущениями и всегда восстанавливают асимптотически свою форму.

В 1967г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (1.10)$$

для уравнения КдФ, где $u_0(x)$ – заданное начальное данное. Современный вариант этого метода называется методом обратной задачи рассеяния.

В 1968г. Лакс (Peter David Lax) обобщил метод обратной задачи рассеяния и вскрыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры. Уравнение КдФ эквивалентно **представлению Лакса**

$$\mathcal{L}_t = [\mathcal{L}, \mathcal{A}] \quad (1.11)$$

для пары дифференциальных операторов \mathcal{L} и \mathcal{A} (говорят также, что операторы \mathcal{L} и \mathcal{A} образуют **лаксову пару**):

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + u, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x, \quad (1.13)$$

см. Задачу 2. Как мы увидим в дальнейшем, именно соотношение (1.11) лежит в основе применимости метода обратной задачи к нелинейным эволюционным уравнениям. Само существование и конкретный вид этих операторов, конечно, зависят от рассматриваемого нелинейного уравнения.

В 1971г. Гарденер, Захаров и Фаддеев построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы. В классической механике имеется теорема Лиувилля, согласно которой система, в которой число интегралов движения в инволюции совпадает с числом степеней свободы n , может быть полностью проинтегрирована (решена) методом разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Такая система является интегрируемой системой. Траектория такой системы в $2n$ -мерном фазовом пространстве может быть представлена в подходящих переменных (переменных действие–угол) как намотка на n -мерном торе. Система, число интегралов в которой меньше числа степеней свободы, проявляет

хаотическое поведение, то есть траектории в фазовом пространстве с близкими начальными условиями могут экспоненциально расходиться. При небольшой деформации интегрируемой системы в неинтегрируемую n -мерный тор в $2n$ -мерном фазовом пространстве разрушается (“размывается”), превращаясь, например в странный аттрактор.

В 1971г. Захаров и Шабат решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера! В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура. После этих работ стало понятно, что уравнение КдФ – не единственное интегрируемое уравнение!!!

В 1975г. Захаров и Шабат предложили процедуру одевания.

Помимо уравнения КдФ в XIX веке были известны: уравнение sine-Гордон и уравнения Цицейки. Для уравнения sine-Гордон, возникающего при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны, был открыт способ построения и “размножения” солитонных решений – преобразование Беклунда.

В создание и развитие теории солитонов огромный вклад внесли школы Фаддеева и Новикова.

1.2 Многомерные уравнения.

Рассмотрим уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x = 3\sigma^2 u_{yy} \quad (1.14)$$

на вещественную функцию $u(t, x, y)$. Здесь $\sigma^2 = \pm 1$. В случае $\sigma^2 = 1$ это уравнение называется КП, а при $\sigma^2 = -1$ – КПИ. Уравнение КП – один из основных примеров в области интегрируемых уравнений в пространстве 2 + 1 измерений. В физических задачах оно возникает в самых разных контекстах и для обоих знаков σ^2 . При этом свойства решений этих уравнений сильно зависят от выбора знака. Оператор Лакса имеет вид

$$\mathcal{L} = i\sigma\partial_y + \partial_x^2 - u(x, y), \quad \sigma = 1, i \quad (1.15)$$

Здесь мы будем рассматривать уравнение КПИ, т.е.

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x = -3u_{yy}. \quad (1.16)$$

Его пара Лакса есть

$$\mathcal{L} = -\partial_y + \partial_x^2 - u(x, y), \quad (1.17)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x - 3 \int_{-\infty}^x dx' u_y(x', y), \quad (1.18)$$

так что (1.16) эквивалентно (1.11).

Задача 1 Показать, что задача Коши

$$\begin{aligned} u_t &= 6uu_x \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

для бездисперсного уравнения КдФ (1.6) решается посредством равенства (1.7).

Задача 2 Доказать, что (1.11), где \mathcal{L} и \mathcal{A} даны в (1.12) и (1.13), эквивалентно (1.1).

2 Лекция

2.1 Общая схема метода обратной задачи

Рассмотрим теперь подробнее схему метода обратной задачи на примере уравнения Кортевега–де Фриза. Лаксова пара для него дана в (1.12) и (1.13):

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + u, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x. \quad (2.2)$$

Важнейшей особенностью пары Лакса является то, что временная производная не входит в \mathcal{L} -оператор. Таким образом мы можем рассматривать t как параметр и исследовать спектральные свойства этого оператора, т.е., исследовать решения уравнения

$$\mathcal{L}y = \lambda y, \quad (2.3)$$

где мы ввели $\lambda = -z^2$. Это уравнение на функцию $y(t, x)$ есть **спектральная проблема** для оператора (1.12), иногда оно также называется **вспомогательной линейной задачей** для рассматриваемого нелинейного уравнения. Заметим, что в силу (1.11)

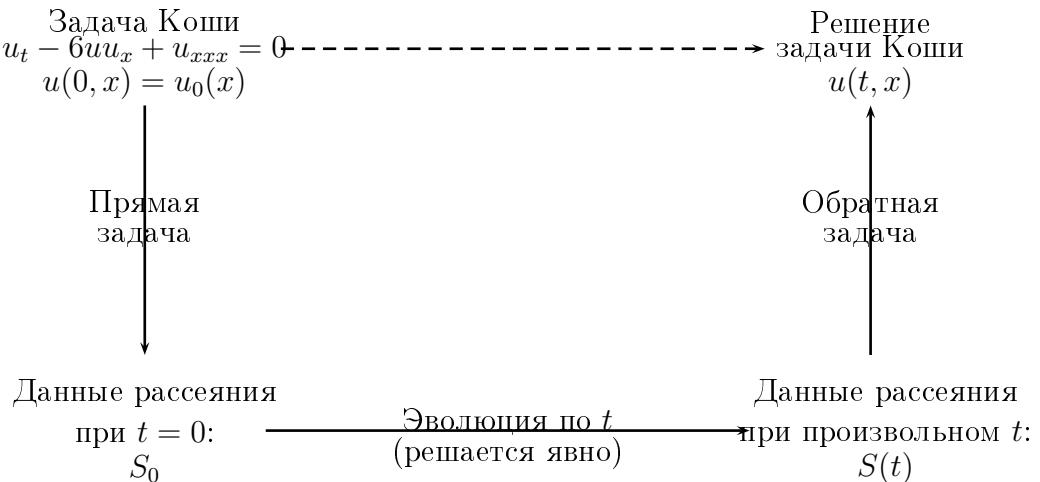
$$(\mathcal{L} - \lambda)(y_t + \mathcal{A}y) = 0, \quad (2.4)$$

т.е. комбинация $y_t + \mathcal{A}y$ также удовлетворяет уравнению (2.3), но не обязана быть нулем. В то же время, уравнение

$$y_t = -\mathcal{A}y \quad (2.5)$$

совместно с уравнением (2.3) в силу (1.11). Здесь уместно подчеркнуть, что совместность уравнений означает лишь наличие их общего решения, но отнюдь не то, что каждое решение одного из них будет решением и другого.

Уравнение (2.3) хорошо известно в физике: это стационарное одномерное уравнение Шредингера. Впрочем, оно также исследовалось математиками еще в XIX веке (уравнение Штурма–Лиувилля). Для нас важно, что для уравнения (2.3) разрешимы прямая и обратная задачи рассеяния. Прямая задача: определение по потенциалу u и данных рассеяния, которые мы обозначим S . Их определения и свойства будут даны в последующих лекциях. Обратная задача: восстановление потенциала u по данным рассеяния. При этом мы покажем как из условия достаточно быстрого убывания потенциала на пространственной бесконечности равенства (2.4) и (2.5) приводят к линейным дифференциальным уравнениям по t на данные рассеяния. Таким образом, как уже говорилось, общая схема метода обратной задачи рассеяния в применении к теории нелинейных интегрируемых уравнений демонстрируется следующей диаграммой: По заданному начальному данному $u_0(x)$ строятся отвечающие ему данные рассеяния S_0 . Далее, явно решается уравнение временной эволюции для спектральных данных, т.е. мы находим данные рассеяния $S(t)$. По ним, используя уравнения обратной задачи, мы восстанавливаем потенциал $u(t, x)$, который ввиду эквивалентности (1.11) и уравнения КdФ (1.1) есть решение этого нелинейного уравнения и поставленной задачи Коши. Таким образом, решение нелинейного уравнения свелось к решению трех линейных задач, одна из которых решается



явно! Как мы видели ранее, весь метод основан именно на разрешимости обратной задачи. Это – основное условие применимости метода. Очевидно, что для уравнения (1.1) есть и гораздо более простая “лаксова пара”:

$$\mathcal{L} = \partial_x + u, \quad \mathcal{A} = 3u^2 - u_{xx}, \quad (2.6)$$

для которой также равенство (1.11) эквивалентно уравнения КдФ (1.1). Однако, такой \mathcal{L} -оператор – преобразование подобия оператора ∂_x :

$$\mathcal{L} = \exp\left(-\int^x u(x)\right) \partial_x \exp\left(-\int^x u(x)\right),$$

где в отличии от рассмотренного ранее оператора K оператор преобразования является оператором умножения. Поэтому такой оператор \mathcal{L} имеет тривиальный спектр, не зависящий от $u(x)$, и соответственно, обратная задача для него не имеет смысла. Отметим, что такого рода бесполезные “пары Лакса” могут быть выписаны для любого уравнения в любом числе измерений. Поэтому, говоря об интегрируемых уравнениях, мы всегда будем иметь ввиду наличие для них лаксовой пары, в которой для оператора \mathcal{L} осмыслены прямая и обратная задачи.

3 Лекция

3.1 Решения Йоста

Итак, мы на некоторое время опускаем явную зависимость от t и приступаем к исследованию спектральной задачи на всей оси ($-\infty < x < +\infty$) для вещественного, ($u(x) \in \mathbb{R}$), непрерывного и убывающего при больших x ($u(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$) потенциала. Из стандартного курса квантовой механики известно, что непрерывный спектр уравнения (2.3) с оператором (1.12) (уравнение Шредингера, уравнение Штурма–Лиувилля) лежит на положительной полуоси $\lambda \geq 0$ спектрального параметра и является двукратно вырожденным. Мы рассматриваем класс потенциалов

$$\int dx |u(x)|(1+|x|) < \infty, \quad (3.1)$$

причем, как и ранее, мы используем символ \int в смысле $\int_{-\infty}^{+\infty}$. В дальнейшем мы будем получать некоторые результаты и при более жестком условии на потенциал:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\epsilon}}\right) \quad \text{для некоторого } \epsilon > 0. \quad (3.2)$$

Нам будет также удобно далее обозначать спектральный параметр $\lambda = k^2$ (т.е. $z = ik$), так что уравнение (2.3) приобретает вид

$$-y_{xx} + u(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.3)$$

при этом именно k мы будем называть спектральным параметром.

Пусть $k \in \mathbb{R}$. Введем два специальных решения уравнения (3.3), задав их асимптотиками на отрицательной и положительной бесконечностях, соответственно:

$$\varphi_+(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (3.4)$$

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Эти решения известны в литературе как **решения Йоста**. Ввиду вещественности потенциала $u(x)$ и параметра k комплексно сопряженные функции $\bar{\varphi}_+(x, k)$ и $\bar{\varphi}_-(x, k)$ также являются решениями уравнения (3.3). Причем в силу граничных условий (3.4), (3.5)

$$\bar{\varphi}_{\pm}(x, k) = \varphi_{\pm}(x, -k).k \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

Чтобы убедиться в существовании всех введенных решений, заметим, что дифференциальное уравнение (3.3) совместно с граничными условиями (3.4) или (3.5), соответственно, эквивалентно интегральным уравнениям

$$\varphi_{\pm}(x, k) = e^{-ikx} + \int_{\mp\infty}^x dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x') \varphi_{\pm}(x', k). \quad (3.7)$$

Задача 3. Эти уравнения принадлежат классу Вольтерра, а потому однозначно разрешимы при условии (3.1) на потенциал. Введем вспомогательные функции

$$\chi_{\pm}(x, k) = e^{ikx} \varphi_{\pm}(x, k), \quad (3.8)$$

удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$-\chi_{\pm,xx}(x, k) + 2ik\chi_{\pm,x} + u(x)\chi_{\pm} = 0. \quad (3.9)$$

Тогда вместо (3.7) мы имеем

$$\chi_{\pm}(x, k) = 1 + \int_{\mp\infty}^x dx' \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_{\pm}(x', k). \quad (3.10)$$

Очевидно, что равенство при верхнем (нижнем) знаке допускает аналитическое продолжение на верхнюю (нижнюю) полуплоскость $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$ (соответственно, $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \leq 0$, поскольку экспоненты в подынтегральных выражениях в этих областях убывают. Свойства этих функций дают следующие леммы.

Лемма 3.1 (*Фаддеев*) *Существует такая константа K , что:*

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (3.11)$$

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |x' u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

$$|\partial_x \chi_+(x, k)| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

Кроме того, функция $\chi_{+,k}(x, k)$ непрерывно дифференцируема по $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$ за исключением, может быть, точки $k = 0$. При этом выполнена оценка:

$$|\partial_k \chi_+(x, k)| \leq \frac{K}{|k|}, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (3.12)$$

Лемма 3.2 *Существует*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (3.13)$$

Доказательство По предыдущей лемме $\chi_+(x, k)$ ограничена при всех $-\infty \leq x \leq +\infty$, $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x dy e^{2ik(x-y)} \chi_+(y, k) u(y) = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 dy e^{-2iky} \chi_+(y+x, k) u(y+x) = 0 \end{aligned}$$

в силу (3.2). Теперь (3.13) следует в силу (3.10).

Задача 3 *Доказать, что уравнение (3.7) эквивалентно (3.3) и условию (3.4) или (3.5), соответственно.*

3.2 Асимптотическое поведение решений Йоста по k .

Интегральные уравнения (3.10) позволяют уточнить указанное в Лемме 3.1 асимптотическое поведение по k . Действительно, как уже говорилось, слагаемые с экспонентами убывают, а потому по (3.11):

$$\chi_{\pm}(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mp\infty}^x dx' u(x') + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} k \gtrless 0. \quad (3.14)$$

Эти формулы позволяют восстановить потенциал $u(x)$ (точнее говоря, его первообразную) по известным решениям Йоста.

Укажем также обобщение на комплексный случай соотношений (3.6):

$$\overline{\varphi_{\pm}(x, k)} = \varphi_{\pm}(x, -\bar{k}), \quad \operatorname{Im} k \gtrless 0, \quad (3.15)$$

что следует из указанных свойств аналитичности в соответствующих полуплоскостях. В частности отсюда следует, что при чисто мнимых $k = ip$, $\operatorname{Im} p = 0$ решения Йоста вещественны:

$$\operatorname{Im} \varphi_{\pm}(x, \pm ip) = 0, \quad p \geq 0 \quad (3.16)$$

Литература:

В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, “Теория солитонов: Метод обратной задачи”, “Наука”, 1980.

Ф.Калоджеро, А.Дегасперис, “Спектральные преобразования и солитоны”, “Мир”, 1985.

4 Лекция

4.1 Матрица монодромии

Пары решений $\varphi, \bar{\varphi}$ и $\varphi_-, \bar{\varphi}_-$ линейно независимы при вещественных k , отличных от нуля. Действительно, пусть

$$W(f, g) = fg_x - f_x g \quad (4.1)$$

означает вронскиан функций f и g . Обращение вронскиана в ноль эквивалентно пропорциональности функций f и g . Хорошо известно (Задача 4), что если f и g удовлетворяют уравнению (3.3), то

$$\partial_x W(f, g) = 0. \quad (4.2)$$

таким образом для вычисления значений вронскианов решений Йоста можно воспользоваться их асимптотическим поведением (3.4) и (3.5), что дает (Задача 5)

$$W(\varphi_+, \bar{\varphi}_+) = W(\varphi_-, \bar{\varphi}_-) = 2ik. \quad (4.3)$$

Итак при $k \neq 0$ решение φ_+ линейно независимо от $\bar{\varphi}_+$ и аналогично для пары $\varphi_-, \bar{\varphi}_-$. Поскольку уравнение (3.3), как и всякое уравнение второго порядка, может иметь не более двух линейно независимых решений, то каждая из этих пар образует полный набор. Таким образом существует постоянная (т.е. не зависящая от x) **(приведенная) матрица монодромии** $T(k)$ такая, что

$$\begin{pmatrix} \varphi_+(x, k) \\ \bar{\varphi}_+(x, k) \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \varphi_-(x, k) \\ \bar{\varphi}_-(x, k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

где

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где мы учли, что вторая строка в (4.4) является комплексно сопряженной к первой. Отметим, что в соответствии с предыдущим обсуждением точку $k = 0$ мы в дальнейшем рассмотрим отдельно.

Первая строка равенства (4.4) имеет вид

$$\varphi_+(x, k) = a(k) \varphi_-(x, k) + b(k) \bar{\varphi}_-(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

что ввиду (3.6), т.е. в силу вещественности потенциала $u(x)$, означает, выполнение соотношений

$$\bar{a}(k) = a(-k), \quad \bar{b}(k) = b(-k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

для элементов матрицы монодромии. Для того, чтобы найти явное выражение этих элементов через потенциалы и решения Йоста, запишем (3.7) как

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, k) &= e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') - \\ &\quad - \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') - \\ &\quad - \int_x^{+\infty} dx' \frac{\sin k(x - x')}{k} \varphi_+(x', k) u(x'). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тогда в силу (4.6)

$$\begin{aligned} a(k) \varphi_-(x, k) + b(k) \overline{\varphi}_-(x, k) &= e^{-ikx} \left(1 - \frac{1}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') \right) + \\ &\quad + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') + \\ &\quad + a(k) (\varphi_-(x, k) - e^{-ikx}) + \\ &\quad + b(k) (\overline{\varphi}_-(x, k) - e^{ikx}), \end{aligned}$$

так что

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{iky} \varphi_+(y, k) u(y) \equiv 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (4.9)$$

и

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi_+(y, k) u(y). \quad (4.10)$$

Ввиду доказанной ранее аналитичности χ_+ в области $\text{Im}k > 0$, видно, что и функция $a(k)$ также аналитична в верхней полуплоскости и задается равенством (4.9) при $\text{Im}k \geq 0$. Что касается функции $b(k)$, то она, вообще говоря, не продолжается с вещественной прямой $\text{Im}k = 0$. Для ее продолжимости в комплексную область следует потребовать, например, чтобы потенциал $u(x)$ убывал с ростом x быстрее любой линейной экспоненты, что сильно сужает класс рассматриваемых потенциалов, а потому мы не будем накладывать это условие.

Отметим, что в силу (3.11)

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0 \quad (4.11)$$

а в силу (3.13)

$$a(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) \quad (4.12)$$

Аналогично предыдущему можно получить при $\text{Im}k \geq 0$ представления

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \overline{\varphi}_-(y, k) u(y) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \overline{\chi_-(y, \bar{k})} u(y), \quad (4.13)$$

где, в соответствии с предыдущим, функция $\overline{\varphi}_-(x, k)$ аналитична в верхней полуплоскости переменной k , поскольку $\overline{\varphi}_-(x, k) \equiv \overline{\varphi}_-(x, \bar{k})$ и аналогично $\overline{\chi}_-$. Кроме того:

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi_-(y, k) u(y), \quad \text{Im}k = 0, \quad (4.14)$$

см. Задачу 6.

4.2 Свойства элементов матрицы монодромии.

Полученные выражения для функций $a(k)$ и $b(k)$ показывают, что в точке $k = 0$ обе они, вообще говоря, имеют полюсную особенность:

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1), \quad b(k) = \frac{-ic}{k} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

причем в силу (4.9) или (4.10)

$$c = \frac{1}{2} \int dy \varphi_+(y, 0) u(y), \quad (4.16)$$

что вещественно в силу вещественности потенциала и (3.6), т.е. опять-таки в силу вещественности потенциала. Тогда, мы видим, что соотношение (4.6) выполняется и в точке $k = 0$: предел правой части при $k \rightarrow 0$ существует по Лемме (3.1), а предел правой части существует опять же в силу этой Леммы, условия (3.6) и (4.15) и равен

$$\varphi_+(x, 0) = 2ic\varphi_{-,k}(x, 0) + \tilde{c}\varphi_-(x, 0), \quad (4.17)$$

где \tilde{c} — некоторая константа. По условию нормировки (3.5): $\varphi_{-,k}(x, 0) = -ix + O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом равенство (4.15) имеет прозрачный смысл: решение, ограниченное на левом конце оси x -ов ($\varphi(x, 0) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$), на правом конце представляет собой линейную комбинацию линейно растущего ($\varphi_{-,k}(x, 0)$) и ограниченного ($\varphi_-(x, 0)$) решений. Понятно, что для потенциалов общего положения $c \neq 0$. Если же выполнено условие $c = 0$, т.е. каждое решение ограниченное на левом конце остается ограниченным и на правом (легко убедиться, что это утверждение справедливо и в случае, если ‘левое’ и ‘правое’ поменять местами), называются **потенциалами с квазиуровнем при нулевой энергии**.

Предел малых u . В первом порядке по потенциалу u элемент $b(k)$ матрицы монодромии переходит в преобразование Фурье потенциала, как следует из (4.10):

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-2iky} u(y) + O(u^2) \quad (4.18)$$

Элементы a и b матрицы монодромии не независимы. Действительно, подставляя (4.6) в первое равенство в (4.3), мы в силу второго равенства получаем унимодулярность матрицы монодромии (Задача 7)

$$\det T(k) \equiv |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Тогда обратная матрица $T(k)^{-1}$ равна

$$T(k)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & a(k) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

а обращение равенства (4.6) имеет вид

$$\varphi_-(x, k) = \bar{a}(k)\varphi_+(x, k) - b(k)\overline{\varphi_+}(x, k), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Отметим также, что в силу, например, равенств (4.6) и (4.3) элементы матрицы монодромии также могут быть выражены посредством соответствующих вронскиханов:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_+(x, k), \overline{\varphi_-}(x, k))}{2ik}, \quad k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \geq 0, \quad (4.22)$$

$$b(k) = \frac{W(\varphi_+(x, k), \varphi_-(x, k))}{-2ik}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

Заметим, что равенство (4.22) дает еще одно доказательство аналитической продолжимости $a(k)$ в верхнюю полуплоскость. При этом, как обычно, мы понимаем $\overline{\varphi_-}(x, k)$ как аналитическое продолжение функции комплексно сопряженной к φ_- . Иными словами: $\overline{\varphi_-}(x, k) \equiv \overline{\varphi_-(x, \bar{k})}$.

Задача 4 Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции $x \in \mathbb{R}$.

1. Доказать, что для любых таких f и g , удовлетворяющих (3.3), выполнено (4.2).
2. Доказать, что для любых таких f и g , удовлетворяющих (4.2), найдется такая функция $u(x)$, что выполнено (3.3).

Задача 5 Доказать (4.3).

Задача 6 Доказать (4.13) и (4.14).

Задача 7 Доказать (4.19).

5 Лекция

5.1 Интерпретация в терминах данных рассеяния

Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\tilde{\varphi}_t = \mathcal{L} \tilde{\varphi}$$

Внимание! ‘Время’ t в этом уравнении не имеет никакого отношения к временной эволюции уравнения КдФ.

На пространственных бесконечностях решения этого уравнения имеют вид плоских волн: $\tilde{\varphi}(t, x, k) = e^{-i(\omega t \pm kx)} + o(1)$, где $\omega = k^2$. Верхний знак отвечает при $k > 0$ волне, движущейся справа налево, а нижний знак — слева направо. В то же время, учитывая (3.5) и (4.6) мы имеем при $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)} e^{ikx} + o(1),$$

где первое слагаемое является падающей, а второе — отраженной волнами. Именно для того, чтобы при падающей волне был единичный коэффициент, мы поделили φ_+ на a . Заметим, что терминология задачи рассеяния, конечно, возникла из рассмотрения радиальной части трехмерного уравнения Шредингера, что объясняет возникновение названий волн: действительно, падающей в таком случае является волна, приходящая с положительной бесконечности, т.е. из области бесконечно больших радиусов. Аналогично при $x \rightarrow -\infty$ получаем прошедшую волну:

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = \frac{e^{-ikx}}{a(k)} + o(1).$$

Таким образом естественно ввести величины

$$t(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \tag{5.1}$$

называемые, соответственно, **коэффициентами прохождения и отражения**. Введенные величины не независимы. В силу (4.19):

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1, \tag{5.2}$$

а в силу (4.7):

$$\bar{t}(k) = t(-k), \quad \bar{r}(k) = r(-k). \tag{5.3}$$

Выполнены, также, следующие свойства:

$$|r(k)| < 1, \quad k \neq 0, \tag{5.4}$$

$$r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \tag{5.5}$$

$$\int dx (1 + |x|) |B_x(x)| < \infty, \quad \text{где} \quad B(x) = \int dk e^{ikx} b(k), \tag{5.6}$$

которые мы приводим здесь без доказательства. Отметим также, что в силу (4.19) и (5.1)

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1 - |r(k)|^2} \tag{5.7}$$

5.2 Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля

Введем еще одно решение уравнения Штурма–Лиувилля, полезное при построении функции Грина этого уравнения. Пусть $s(x, y, k)$ удовлетворяет по x уравнению (3.3) и задано граничными условиями в точке $x = y$:

$$\begin{aligned} s(x, x, k) &= 0, \\ s_x(x, y, k) \Big|_{x=y} &= 1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Это решение задается интегральным уравнением

$$s(x, y, k) = \frac{\sin k(x - y)}{k} + \int_y^x dx' \frac{\sin k(x - x')}{k} u(x') s(x', y, k) \quad (5.9)$$

и, как легко видеть, определяет целую функцию k при всех $k \in \mathbb{C}$. В силу этого уравнения

$$s(x, y, -k) = s(x, y, k), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (5.10)$$

$$\frac{s(x, y, k)}{s(x, y, \bar{k})} = s(x, y, \bar{k}), \quad (5.11)$$

т.е. функция $s(x, y, k)$ вещественна при вещественном k .

Легко также проверить (Задача 8), что в силу равенств (4.6), (4.3), (4.22), (4.23) и (4.21) выполнены следующие представления:

$$s(x, y, k) = \begin{cases} \frac{\varphi_+(x, k)\overline{\varphi_-}(y, k) - \varphi_+(y, k)\overline{\varphi_-}(x, k)}{-2ika(k)}, & \text{при } \operatorname{Im} k \geq 0, \\ \frac{\overline{\varphi_+}(x, k)\varphi_-(y, k) - \overline{\varphi_+}(y, k)\varphi_-(x, k)}{2ik\bar{a}(k)}, & \text{при } \operatorname{Im} k \leq 0, \\ \frac{\varphi_+(x, k)\overline{\varphi_+}(y, k) - \varphi_+(y, k)\overline{\varphi_+}(x, k)}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}, \\ \frac{\varphi_-(x, k)\overline{\varphi_-}(y, k) - \varphi_-(y, k)\overline{\varphi_-}(x, k)}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Для доказательства, например, первого равенства выберем k в верхней полуплоскости. В силу (4.22) полный набор линейно-независимых решений уравнения (3.3) в этом случае есть $\varphi_+(x, k)$ и $\overline{\varphi_-}(x, k)$. Поскольку $s(x, y, k)$ также удовлетворяет (по x) уравнению Штурма–Лиувилля, то найдутся такие, независящие от x , функции $\alpha(y, k), \beta(y, k)$, что

$$s(x, y, k) = \varphi_+(x, k)\alpha(y, k) + \overline{\varphi_-}(x, k)\beta(y, k).$$

Тогда получаем равенства

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, k)\alpha(x, k) + \overline{\varphi_-}(x, k)\beta(x, k) &= 0, \\ \varphi_{+,x}(x, k)\alpha(x, k) + \overline{\varphi_{-,x}}(x, k)\beta(x, k) &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha(y, k) = \frac{-\overline{\varphi_-}(y, k)}{W[\varphi_+(y, k), \overline{\varphi_-}(y, k)]}, \quad \beta(y, k) = \frac{\varphi(y, k)}{W[\varphi_+(y, k), \overline{\varphi_-}(y, k)]}$$

Теперь первое равенство в (5.12) следует из (4.22). Остальные равенства доказываются аналогично, либо следуют из (4.6) и (4.21). Заметим, что попутно мы доказали, что $s(x, y, k)$ удовлетворяет (3.3) по переменной y .

Для демонстрации полезности решения $s(x, y, k)$ рассмотрим следующий пример. Пусть $\tilde{\varphi}_+(x, k)$ – решение Йоста, заданное условием (3.4) и отвечающее некоторому новому потенциалу \tilde{u} . Интегральное уравнение для него можно записать как задачу рассеяния на фоне исходного потенциала u :

$$\tilde{\varphi}_+(x, k) = \varphi_+(x, k) + \int_{-\infty}^x dy s(x, y, k) (\tilde{u}(y) - u(y)) \tilde{\varphi}_+(y, k). \quad (5.13)$$

Отсюда следует, в частности, выражение для вариационных производных функций Йоста:

$$\frac{\delta \varphi_+(x, k)}{\delta u(y)} = s(x, y, k) \varphi_+(y, k) \theta(x - y), \quad (5.14)$$

$$\frac{\delta \varphi_-(x, k)}{\delta u(y)} = -s(x, y, k) \varphi_-(y, k) \theta(y - x), \quad (5.15)$$

где второе равенство выведено аналогично.

5.3 Дискретный спектр

Рассмотрим дискретный спектр:

$$\mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x), \quad (5.16)$$

где $y_n(x) \not\equiv 0$ и $y_n(x) \in \mathcal{L}_2$:

$$\int dx |y_n(x)|^2 < \infty \quad (5.17)$$

Поскольку оператор \mathcal{L} – самосопряженный, то все собственные значения вещественны. Действительно,

$$\lambda_n \int dx |y_n(x)|^2 = \int dx \overline{y_n(x)} \mathcal{L} y_n(x) = \bar{\lambda}_n \int dx |y_n(x)|^2,$$

так что

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n. \quad (5.18)$$

Предположим, что $\lambda_n = k^2 \geq 0$. Тогда, как мы знаем, решения осциллируют на бесконечности как $\sim e^{ikx}$ (или имеют линейное поведение при $k = 0$), а тем самым не принадлежат \mathcal{L}_2 . Итак

$$\lambda_n = -\kappa_n^2, \quad (5.19)$$

причем для определенности будем считать, что

$$\kappa_n > 0. \quad (5.20)$$

Пусть $p \in \mathbb{R}$ и пусть $p > 0$. Как мы знаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_+(x, ip) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_-(x, -ip) = 0. \quad (5.21)$$

На противоположных бесконечностях:

$$\varphi_+(x, ip) = a(ip) e^{px} + o(e^{px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (5.22)$$

$$\varphi_-(x, -ip) = a(ip) e^{-px} + o(e^{-px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (5.23)$$

Итак, для убывания одного из этих решений (а тогда и обоих) на обоих бесконечностях необходимо, чтобы

$$a(i\kappa_n) = 0. \quad (5.24)$$

Введем обозначения:

$$\varphi_{+,n}(x) = \varphi_+(x, i\kappa_n), \quad \varphi_{-,n}(x) = \overline{\varphi_-}(x, i\kappa_n) = \varphi_-(x, -i\kappa_n). \quad (5.25)$$

Ввиду (5.24) это означает, что эти решения пропорциональны друг другу, т.е. существуют такие константы b_n , что

$$\varphi_{+,n}(x) = b_n \varphi_{-,n}(x), \quad (5.26)$$

причем в силу вещественности решений, эти константы также вещественны. Теперь в силу (5.26) мы видим, что условие (5.24) также и достаточно, чтобы $\varphi_{+,n}(x)$ или $\varphi_{-,n}(x)$ были собственными функциями, поскольку они стремятся к нулю на противоположных бесконечностях:

$$\varphi_{+,n}(x) = \begin{cases} b_n e^{-\kappa_n x}, & x \rightarrow +\infty \\ e^{\kappa_n x}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (5.27)$$

Равенство (5.24) определяет κ_n как условие существования убывающего решения уравнения

$$(\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,n}(x) = 0. \quad (5.28)$$

Задача 8 Доказать (5.12).

6 Лекция.

6.1 Простота нулей $a(k)$

Покажем, что нули $a(k)$ простые. Продифференцируем для этого по k уравнение Штурма–Лиувилля на решение Йоста. Тогда

$$(\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = 2i\kappa_n \varphi_+(x, i\kappa_n). \quad (6.1)$$

В силу (3.8) и (4.12) мы имеем асимптотическое поведение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ikx} \varphi_+(x, k) = a(k), \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad (6.2)$$

так что

$$\varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (6.3)$$

хотя, строго говоря, эту асимптотику следует выводить из (4.8), чтобы избежать предположения о дифференцируемости асимптотики (6.2). Теперь, перебрасывая в силу (6.2) и (6.3) производные, получаем

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = 2b_n \kappa_n a'(i\kappa_n) + \int dx \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_+(x, i\kappa_n),$$

так что по (6.1)

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n) (\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = -2\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n.$$

Тогда

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n)^2 = ia'(i\kappa_n) b_n.$$

Левая часть этого равенства положительна, так что $\operatorname{Im}(ia'(i\kappa_n)) = 0$ и

$$a'(i\kappa_n) \neq 0, \quad (6.4)$$

причем

$$\operatorname{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = \operatorname{sgn} b_n. \quad (6.5)$$

Отсюда следует, в частности, что $s(x, y, k)$ не имеет особенностей при $k = i\kappa_n$.

6.2 Формула Сохоцкого–Племеля.

Здесь нам потребуется известная формула Сохоцкого–Племеля, которую мы выведем в весьма упрощенном случае. Пусть $f(x)$ – непрерывная, непрерывно дифференцируемая функция $x \in \mathbb{R}$, интегрируемая на всей оси. Рассмотрим $\int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon}$, где $\epsilon > 0$. Нас интересует предел этого интеграла при $\epsilon \rightarrow 0$. Запишем

$$\int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon} = \int_{|x|>1} \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon} + \int_{-1}^1 dx \frac{f(x) - f(0)}{x \pm i\epsilon} + f(0) \int_{-1}^1 dx \frac{1}{x \pm i\epsilon}.$$

Таким образом, предел правой части, если он существует, равен

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon} = \int_{|x|>1} \frac{dx f(x)}{x} + \int_{-1}^1 dx \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \frac{1 \pm i\epsilon}{-1 \pm i\epsilon},$$

поскольку первые два интеграла, очевидно, сходятся, а третий интеграл мы вычислили явно, где логарифм определен с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Этот предел также существует и равен

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \frac{1 \pm i\epsilon}{-1 \pm i\epsilon} = \mp i\pi.$$

Это доказывает существование предела левой части. Соответствующее предельное значение принято обозначать

$$\int \frac{dx f(x)}{x \pm i0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dx f(x)}{x \pm i\epsilon}.$$

Далее, используя стандартное определение интеграла в смысле главного значения, можно упростить предыдущее выражение:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^1 \right) dx \frac{f(x) - f(0)}{x} = \text{p.v.} \int_{-1}^1 \frac{dx f(x)}{x}.$$

Суммируя все сказанное, мы приходим к формуле Сохоцкого–Племеля:

$$\int \frac{dx f(x)}{x \pm i0} = \text{p.v.} \int \frac{dx f(x)}{x} \mp i\pi f(0), \quad (6.6)$$

которую также часто записывают в виде

$$\frac{1}{x \pm i0} = \text{p.v.} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (6.7)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака – классический пример обобщенной функции.

6.3 Дисперсионное соотношение.

Вернемся к исследованию элементов матрицы монодромии. Введем функцию

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n}, \quad (6.8)$$

Для $k \in \mathbb{R}$: $|a_1(k)| = |a(k)|$. Эта функция продолжается в верхнюю полуплоскость по переменной k и по доказанному ранее, не имеет там нулей. Поэтому функция $\ln a_1(k)$ аналитична в $\text{Im}k > 0$, и убывает на бесконечности: $\ln a_1(k) \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$. Тогда в силу леммы Жордана для любого k в нижней полуплоскости, $\text{Im}k < 0$, выполняется тождественно

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k} = 0,$$

так что в пределе $\text{Im}k \rightarrow -0$, получаем:

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k + i0} = 0. \quad (6.9)$$

Далее, как известно

$$\ln a_1(k) = \ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k), \quad (6.10)$$

а также имеется формула Сохоцкого–Племеля:

$$\frac{1}{k \pm i0} = \wp \frac{1}{k} \mp i\delta(k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (6.11)$$

где использованы стандартные обозначения для общенных функций вещественной переменной k : $\frac{1}{k \pm i0}$ как предела из верхней/нижней полуплоскости, $\wp \frac{1}{k}$ в смысле главного значения и дельта функции $\delta(k)$. Поэтому вещественная часть тождества (6.9) дает

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a_1(k')|}{k' - k}.$$

Таким образом:

$$a_1(k) = \exp \left\{ \ln |a(k)| - \frac{i}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} \right\},$$

что можно переписать в виде

$$a_1(k) = \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int dk' \ln |a(k')| \left(\wp \frac{1}{k' - k} + i\pi\delta(k' - k) \right) \right\},$$

т.е. в силу (6.11) как

$$a_1(k) = \exp \left\{ \frac{-i}{\pi} \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k - i0} \right\}.$$

Значит, по (5.7),

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k - i0} \right), \quad \text{Im } k = 0, \quad (6.12)$$

или

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k} \right), \quad \text{Im } k > 0. \quad (6.13)$$

Итак, $a(k)$ восстанавливается по $|r(k)|$ и набору $\kappa_1, \dots, \kappa_N$. Теперь и $b(k)$ можно тоже восстановить по $r(k)$ и набору $\kappa_1, \dots, \kappa_N$:

$$b(k) = r(k)a(k). \quad (6.14)$$

7 Лекция.

Из дисперсионного соотношения следует много полезных фактов. С некоторыми из них мы будем знакомиться дальше. Сейчас отметим, что функция $a(k)$ вещественна при чисто мнимых значениях аргумента, $\text{Im}(a(ip)) = 0$, поскольку

$$a(ip) = \prod_{n=1}^N \frac{p - \kappa_n}{p + \kappa_n} \exp \left\{ \frac{p}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + p^2} \right\}, \quad p > 0. \quad (7.1)$$

Удобно упорядочить собственные значения уравнения (5.16) так, чтобы

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad (7.2)$$

так что по (5.19):

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N. \quad (7.3)$$

Тогда из (7.1) имеем :

$$\text{sgn } a(ip) = \begin{cases} +1, & p > \kappa_1, \\ (-1)^n, & \kappa_n > p > \kappa_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ (-1)^N, & \kappa_N > p. \end{cases} \quad (7.4)$$

Более того, для производной получаем, что

$$ia'(i\kappa_n) = \frac{1}{2\kappa_n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_m} \exp \left\{ \frac{\kappa_n}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + \kappa_n^2} \right\}, \quad (7.5)$$

так что

$$\text{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = (-1)^n, \quad (7.6)$$

а тогда по (6.5) и

$$b_n = (-1)^{n-1} |b_n|. \quad (7.7)$$

Точно также, по (4.16) получаем, что

$$c = (-1)^N |c|. \quad (7.8)$$

7.1 “Явные” формулы для κ_n и b_n .

Равенства (4.9), (4.10) и (4.13), (4.14) можно рассматривать как нелинейное обобщение преобразования Фурье потенциала $u(x)$, где вместо экспонент e^{-ikx} выступают решения Йоста, которые, естественно, определяются тем же потенциалом $u(x)$. Аналоги таких соотношений имеются и для дискретных степеней свободы. Так, ввиду (4.9) и (4.13), равенство (5.24) означает, что κ_n можно определить как решения уравнения

$$2\kappa_n = - \int dy e^{-\kappa_n y} \varphi_{+,n}(y) u(y), \quad (7.9a)$$

$$\text{или } 2\kappa_n = - \frac{1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} \varphi_{-,n}(y) u(y), \quad (7.9b)$$

а значения решений Йоста в этих точках (см. (5.25)) даются как решения интегральных уравнений, которые вытекают из (3.7):

$$\varphi_{+,n}(x) = e^{\kappa_n x} + \int_{-\infty}^x dy \frac{\operatorname{sh} \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y), \quad (7.10a)$$

$$\varphi_{-,n}(x) = e^{-\kappa_n x} - \int_x^\infty dy \frac{\operatorname{sh} \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_{-,n}(y). \quad (7.10b)$$

Первое равенство здесь можно записать как

$$\varphi_{+,n}(x) = - \int dy \frac{e^{\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y) + \int_{-\infty}^x dy \frac{e^{\kappa_n(x-y)} - e^{-\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y),$$

а потому в силу (7.9) эти значения решений Йоста являются также решениями однородных интегральных уравнений:

$$\varphi_{+,n}(x) = - \int dy \frac{e^{-\kappa_n|x-y|}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y), \quad \varphi_{-,n}(x) = - \int dy \frac{e^{-\kappa_n|x-y|}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{-,n}(y), \quad (7.11)$$

где второе равенство выводится аналогично. Далее, сравнивая интегральные уравнения (7.10), легко получить (Задача 9), что коэффициент b_n в (5.26) равен

$$b_n = \frac{-1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} u(y) \varphi_{+,n}(y). \quad (7.12)$$

Заметим, что это значение совпадает с формальным продолжением выражения (4.10) в точку $k = i\kappa_n$. Однако, такое продолжение существует лишь для узкого класса потенциалов, например, убывающих на бесконечности быстрее любой линейной экспоненты. В общем же случае потенциалов, удовлетворяющих (3.1) или (3.2), такое продолжение не существует.

7.2 Данные рассеяния.

Введем вместо b_n новые переменные

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (7.13)$$

которые удобны тем, что в силу (6.5) они положительны. В качестве данных рассеяния (спектральных данных) мы выбираем

$$S = \{r(k), \kappa_n, \beta_n, n = 1, \dots, N\}. \quad (7.14)$$

Потенциалы, которым отвечает нулевой коэффициент прохождения:

$$r(k) \equiv 0, \quad (7.15)$$

называются **безотражательными**.

Как мы видели ранее, по данным рассеяния однозначно восстанавливаются элементы матрицы монодромии $a(k)$, $b(k) = a(k)r(k)$ и $b_n = i\beta_n a'(i\kappa_n)$. Покажем, что по ним также однозначно восстанавливается и потенциал.

7.3 Обратная задача: задача Римана–Гильберта

Задача Римана–Гильберта – задача восстановления функции аналитической вне и внутри некоторого контура по линейному уравнению на ее предельные значения на контуре и нормировке на бесконечности. Покажем, что обратная задача, т.е. задача восстановления потенциала в уравнении Штурма–Лиувилля по данным рассеяния, является специальным случаем задачи Римана–Гильберта. В силу (3.8) перепишем (4.6) в виде

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = \chi_-(x, k) + r(k)\overline{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}. \quad (7.16)$$

Введем функцию комплексного переменного

$$X(x, k) = \begin{cases} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)}, & \operatorname{Im}k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \operatorname{Im}k < 0 \end{cases}, \quad (7.17)$$

и пусть $X_{\pm}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} X(k + i\epsilon)$, где $k \in \mathbb{R}$. Функция $X(k)$ аналитична в нижней полуплоскости, мероморфна в верхней и имеет там полюса в точках $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$. Введем

$$\gamma_n(x) = -ie^{\kappa_n x} \operatorname{res}_{k=i\kappa_n} X(x, k), \quad (7.18)$$

что по (3.8) и (7.17) дает

$$\gamma_n(x) = \frac{\chi_+(x, i\kappa_n)e^{\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} \equiv \frac{\varphi_+(x, i\kappa_n)}{ia'(i\kappa_n)}. \quad (7.19)$$

На вещественной оси эта функция, как следует из (7.16), имеет разрыв:

$$X_+(x, k) - X_-(x, k) = r(k)\overline{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \operatorname{Im}k = 0. \quad (7.20)$$

Чтобы удалить полюсные особенности, рассмотрим

$$\tilde{X}(x, k) = X(x, k) - i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n}. \quad (7.21)$$

Эта функция аналитична в верхней и нижней полуплоскостях и имеет тот же разрыв на вещественной оси, что и (7.20):

$$\tilde{X}_+(x, k) - \tilde{X}_-(x, k) = r(k)\overline{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \operatorname{Im}k = 0. \quad (7.22)$$

Кроме того в силу (3.14), (4.11) и (7.16) выполнено асимптотическое поведение

$$\tilde{X}(x, k) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \quad (7.23)$$

Тогда по формуле Лиувилля

$$\tilde{X}(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{\tilde{X}_+(x, k') - \tilde{X}_-(x, k')}{k' - k}, \quad (7.24)$$

так что по (7.21)

$$X(x, k) = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') \overline{X}_-(x, k') e^{2ik' x}}{k' - k}, \quad \text{Im}k \neq 0. \quad (7.25)$$

Переходя к пределам на вещественной оси, получаем уравнения

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') \overline{\chi}_-(x, k') e^{2ik' x}}{k' - k - i0}, \quad \text{Im}k = 0 \quad (7.26)$$

и

$$\chi_-(x, k) = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') \overline{\chi}_-(x, k') e^{2ik' x}}{k' - k + i0}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (7.27)$$

Перейдем к решениям Йоста. Тогда вместо (7.26) мы имеем при $\text{Im}k = 0$

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{i(\kappa_n - k)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' - k)x} \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' - k - i0}, \quad (7.28)$$

а вместо (7.27)

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-i(k - i\kappa_n)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' - k)x} \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' - k + i0}. \quad (7.29)$$

Первое из них определяет $\varphi_+(x, k)$, если известны $\varphi_-(x, k)$ и $\gamma_n(x)$. Для того, чтобы второе равенство превратилось в интегральное уравнение на $\varphi_-(x, k)$, воспользуемся (7.19), которое в силу (7.13) и (5.26) дается в виде

$$\gamma_n(x) = \beta_n \varphi_-(x, -i\kappa_n). \quad (7.30)$$

Иными словами мы связали вычеты в полюсах функции X в верхней полуплоскости с ее значениями в нижней. Продолжая (7.29) в нижнюю полуплоскость, мы получаем по (7.30)

$$\gamma_n(x) = \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} - \sum_{m=1}^N \frac{\gamma_m(x)e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' + i\kappa_n)x} \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}, \quad (7.31)$$

что вместе с (7.29) дает уже замкнутую систему **уравнений обратной задачи** для функции $\varphi_-(x, k)$. Можно доказать однозначную разрешимость этих

уравнений в выбранном классе спектральных данных. Тогда потенциал $u(x)$ восстанавливается по (3.14):

$$u(x) = \partial_x \left\{ 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n(x) e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{\pi} \int dk' r(k') e^{ik' x} \overline{\varphi_-}(x, k') \right\}. \quad (7.32)$$

Задача 9 Доказать (7.12).

8 Лекция.

8.1 Временная эволюция.

Итак, мы разобрали прямую задачу (левая стрелка вниз на диаграмме 2.1). Теперь, наконец, нам предстоит разобрать временную эволюцию данных рассеяния (нижняя горизонтальная стрелка на диаграмме 2.1), эквивалентную тому, что $u(x)$ зависит от t в силу уравнения (1.1). Последнее, как мы видели, эквивалентно выполнению представления Лакса (1.11), где оператор M определен в (1.13). Тогда, ввиду (2.4) и асимптотических условий (3.4) и (3.5), получаем:

$$\varphi_{+,t}(x, k) + \mathcal{A}\varphi_+(x, k) = 4ik^3\varphi_+(x, k), \quad (8.1)$$

$$\varphi_{-,t}(x, k) + \mathcal{A}\varphi_-(x, k) = 4ik^3\varphi_-(x, k), \quad (8.2)$$

где $k \in \mathbb{R}$, но оба равенства допускают продолжения в соответствующие полуплоскости спектрального параметра. Далее, по (4.6), (8.1) и (8.2) находим, что

$$a_t(k)\varphi_-(x, k) + b_t(k)\overline{\varphi_-}(x, k) = 8ik^3b(k)\overline{\varphi_-}(x, k), \quad k \in \mathbb{R},$$

что ввиду линейной независимости $\varphi_-(x, k)$ и $\overline{\varphi_-}(x, k)$ при $k \neq 0$ дает эволюцию элементов матрицы монодромии:

$$a_t(k) = 0, \quad (8.3)$$

$$b_t(k) = 8ik^3b(k) \quad (8.4)$$

при $k \in \mathbb{R}$. Однако, ввиду того, что $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость k , равенство (8.3) выполняется также и при всех $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$. Таким образом функция $a(k)$ есть порождающий функционал интегралов движения, которыми будут, например, все коэффициенты ее ряда Тейлора, или значения в различных точках этой полуплоскости. В частности, не зависят от времени и положения нулей этой функции, т.е.

$$\partial_t\kappa_n = 0. \quad (8.5)$$

Далее, из (5.26) и аналитических продолжений равенств (8.1) и (8.2) в соответствующие полуплоскости, следует, что

$$\partial_t b_n = 8\kappa_n^3 b_n. \quad (8.6)$$

Суммируя, для временной эволюции спектральных данных получаем:

$$r_t(k) = 8ik^3r(k) \quad (8.7)$$

и

$$\partial_t\beta_n = 8\kappa_n^3\beta_n. \quad (8.8)$$

Итак, при t отличном от нуля спектральные данные суть

$$S(t) = \left\{ e^{8ik^3t}r(k), \quad \kappa_n, \quad e^{8\kappa_n^3t}\beta_n \right\}. \quad (8.9)$$

Отметим, что в силу (8.7) и (8.5):

$$\partial_t|r(k)| = 0, \quad (8.10)$$

откуда следует (8.3) в силу (6.12).

Подставляя данные рассеяния (8.9) в уравнения обратной задачи, мы находим решение Йоста $\varphi_-(t, x, k)$, отвечающее моменту t и, очевидно, совпадающее с исходным $\varphi_-(x, k)$ при $t = 0$. Так построенное решение Йоста удовлетворяет уравнению (8.2), однако проверка этого факта достаточна громоздка и мы ее здесь опускаем. А отсюда уже следует, что потенциал $u(t, x)$, восстановленный по (7.32), решает задачу Коши для уравнения КдФ. Итак, мы замкнули диаграмму 2.1, сведя решение нелинейной задачи к последовательному решению трех линейных задач, одна из которых решается явно. В этом и состоит общая схема метода обратной задачи рассеяния.

8.2 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.

Мы показали, что решение Йоста $\varphi_-(x, k)$ уравнения Штурма–Лиувилля удовлетворяет системе уравнений (7.29) и (7.31). Докажем теперь обратное утверждение: решение $\varphi_-(x, k)$ уравнений (7.29) и (7.31) удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля с потенциалом, заданным по (7.32). Для этого продифференцируем указанные уравнения:

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) &= i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} - 2i\partial_x\gamma_n(x) + 2i\kappa_n(x)\gamma_n \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\overline{\varphi_-}(x, k')}{k' - k + i0} + \right. \\ &\quad \left. + 2i\partial_x\overline{\varphi_-}(x, k') - 2k'\overline{\varphi_-}(x, k') \right\}, \\ (\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x) &= -\beta_n \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2)\gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} - 2\partial_x\gamma_m(x) + 2\kappa_m\gamma_m(x) \right\} + \\ &+ \frac{\beta_n}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\overline{\varphi_-}(x, k')}{k' + i\kappa_n} + \right. \\ &\quad \left. + 2i\partial_x\overline{\varphi_-}(x, k') - 2k'\overline{\varphi_-}(x, k') \right\}, \end{aligned}$$

что в силу (7.32) можно переписать как

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} u(x) + i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\overline{\varphi_-}(x, k')}{k' - k + i0}, \\ (\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x) &= \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} u(x) - \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2)\gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2)\overline{\varphi_-}(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}. \end{aligned}$$

Итак мы видим, что функции $(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k)$ и $(\partial_x^2 - \kappa_n^2)\gamma_n(x)$ удовлетворяют уравнениям с тем же ядрами, что и функции $\varphi_-(x, k)$ и $\gamma_n(x)$, т.е. (7.29) и (7.31),

но с неоднородными членами умноженными на $u(x)$. В силу однозначной разрешимости системы (7.29), (7.31), а также учитывая, что переменная x входит в ядра этой системы как параметр, получаем:

$$(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) = u(x) \varphi_-(x, k), \quad (\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) = u(x) \gamma_n(x). \quad (8.11)$$

Отметим, что равенство $(\partial_x^2 + k^2) \varphi_+(x, k) = u(x) \varphi_+(x, k)$ можно вывести аналогично, либо с помощью (7.28).

Задача 10 * Имеем систему уравнений (7.29) и (7.30). Рассмотреть предел этой системы при $\kappa_{l+1} = \kappa_l$ для некоторого $l \in [1, N - 1]$. Показать, что в этом пределе данная система сводится к такой же системе с заменой $N \rightarrow N - 1$, т.е., что вырождения собственного значения при $k = i\kappa_l$ не возникает.

9 Лекция.

9.1 Интегралы движения.

Локальными полиномиальными интегралами движения называются выражения вида

$$I_n = \int P_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(m)}) dx, \quad (9.1)$$

где P_n – полином n -ой степени от своих аргументов. Покажем, что уравнение КdФ обладает бесконечным набором таких, функционально независимых, интегралов. Поражающим функционалом таких интегралов является функция $a(k)$, которая, как было показано, не зависит от времени. В окрестности особенности по k спектральной задачи, т.е. на бесконечности в данном случае, коэффициенты ее асимптотического разложения могут быть вычислены. Для демонстрации этого, выберем k в верхней полуплоскости и достаточно большим: таким, что $\varphi_+(x, k)$ не обращается в нуль (ввиду асимптотических свойств решения Йоста такое всегда возможно). Введем вместо $\varphi_+(x, k)$ новую функцию $\zeta(x, k)$ равенством

$$\varphi_+(x, k) = \exp \left\{ -ikx + \int_{-\infty}^x dx' \zeta(x', k) \right\}, \quad \operatorname{Im} k > 0. \quad (9.2)$$

В силу условия на k правая часть не имеет нулей, а потому ζ хорошо определена и не имеет особенностей в указанной области. В силу (4.12) имеем

$$\ln a(k) = \int dx \zeta(x, k), \quad (9.3)$$

а по (2.3) эта функция удовлетворяет уравнению Рикатти:

$$\zeta_x + \zeta^2 - u - 2ik\zeta = 0. \quad (9.4)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде асимптотического ряда при $k \rightarrow \infty$

$$\zeta(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_j(x)}{(2ik)^j}, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} k > 0. \quad (9.5)$$

Легко видеть, что

$$\zeta_1(x) = -u(t, x), \quad (9.6)$$

и приравнивая коэффициенты при старших степенях, получаем рекурентные соотношения:

$$\zeta_{j+1}(x) = \partial_x \zeta_j(x) + \sum_{k=1}^{j-1} \zeta_k(x) \zeta_{j-k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (9.7)$$

что показывает, что все коэффициенты $\zeta_j(x)$, последовательно определяемые по (9.7), действительно являются полиномами, локальными по u и ее производным. Для младших коэффициентов мы имеем:

$$\zeta_2(x) = -u_x, \quad \zeta_3(x) = -u_{xx} + u^2, \quad (9.8)$$

$$\zeta_4(x) = -u_{xxx} + 2\partial_x u^2, \quad (9.9)$$

$$\zeta_5(x) = -u_x^{(4)} + \partial_x^2 u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3, \quad (9.10)$$

Мы видим, что $\zeta_2(x)$ и $\zeta_4(x)$ – полные производные локальных выражений, а потому дают нули при интегрировании по всей оси. Покажем, что это справедливо для всех четных коэффициентов $\zeta_{2j}(x)$. Для этого запишем

$$\zeta(x, k) = \zeta_{\text{Re}}(x, k) + i\zeta_{\text{Im}}(x, k), \quad (9.11)$$

где обозначено

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) + \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2}, \quad \zeta_{\text{Im}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) - \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2i}, \quad (9.12)$$

т.е. мы сопрягаем только коэффициенты асимптотического ряда (9.5). Тогда в силу (9.4)

$$\partial_x \zeta_{\text{Im}} + 2\zeta_{\text{Re}} \zeta_{\text{Im}} - 2k \zeta_{\text{Re}} = 0. \quad (9.13)$$

Ввиду условия на k это равенство можно записать как

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = -\frac{1}{2} \partial_x \ln(\zeta_{\text{Im}}(x, k) - k), \quad (9.14)$$

что доказывает, что $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$, а значит и все четные коэффициенты ряда (9.5) суть полные производные локальных функций. Для $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$ аналогичного свойства нет, а потому мы вводим интегралы движения посредством равенств

$$I_{j-1} = \frac{1}{2} \int dx \zeta_{2j+1}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (9.15)$$

В силу (9.6), (9.8), (9.9) и (9.10) для младших интегралов имеем явно:

$$I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x), \quad I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x), \quad (9.16)$$

$$I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3), \quad (9.17)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int dx (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4). \quad (9.18)$$

Итак, мы доказали в силу (9.2), (9.3) и (9.5), что выполнено асимптотическое разложение

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2I_j}{(2ik)^{2j+3}}. \quad (9.19)$$

С другой стороны, в силу (6.13)

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} + \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k}, \quad \text{Im } k > 0, \quad (9.20)$$

так что полагая, что $r(k) \in \mathcal{S}$, а также используя равенство $|r(-k)| = |r(k)|$, мы получаем явное выражение интегралов движения через данные рассеяния:

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+3}} \left\{ \frac{2(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} - \frac{1}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2) \right\}, \quad (9.21)$$

что по (9.19) дает

$$I_j = \frac{2^{2j+3}(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} + (-1)^j \frac{2^{2(j+1)}}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (9.22)$$

Подчеркнем, что интегралы движения зависят только от “половины” данных рассеяния: переменных $|r(k)|$ и κ_n , но не зависят от $\arg r(k)$ и β_n (переменные действие–угол).

Особого внимания заслуживают три младших интеграла:

$$Q = -2I_{-1} = \int dx u(t, x) = 4 \sum_{n=1}^N \kappa_n + \frac{2}{\pi} \int dk \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (9.23)$$

$$P = I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x) = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 + \frac{4}{\pi} \int dk k^2 \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (9.24)$$

$$H = -I_1 = \int dx \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) = \frac{-32}{5} \sum_{n=1}^N \kappa_n^5 + \frac{16}{\pi} \int dk k^4 \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (9.25)$$

Задача 11 Восстановить детали вывода равенств (8.11).

Задача 12 Показать прямым вычислением, что $I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x)$, $I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x)$ и $I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3)$ суть интегралы движения уравнения $K\partial\Phi$, $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$.

10 Лекция.

10.1 Солитонные решения: $r \equiv 0$.

В этом случае (7.29) сводится к

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_n \frac{e^{i(i\kappa_n - k)x} \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n}, \quad (10.1)$$

а (7.32) — к

$$u(x) = 2\partial_x \sum_n e^{-\kappa_n x} \gamma_n(x). \quad (10.2)$$

Таким образом, уравнения обратной задачи в данном частном случае сводятся к системе **алгебраических** уравнений на функции γ_n . Действительно, вводя $N \times N$ матрицу

$$A_{n,m} = \delta_{n,m} + \frac{e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \beta_n}{\kappa_n + \kappa_m}, \quad (10.3)$$

мы записываем (7.31) в виде

$$\sum_{m=1}^N A_{n,m} \gamma_m = \beta_n e^{-\kappa_n x}.$$

Отсюда

$$\gamma_n = \frac{\det A^{(n)}}{\det A}, \quad (10.4)$$

где матрица $A^{(n)}$ получается из A заменой n -го столбца на столбец $\beta_n e^{-\kappa_n x}$. Подставляя (10.4) в (10.2), заметим что по правилу дифференцирования детерминантов:

$$\sum_n e^{-\kappa_n x} \det A^{(n)} = -\partial_x \det A,$$

так что окончательно для N солитонного решения получаем

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln \det A. \quad (10.5)$$

Поскольку в выражение (10.5) для потенциала входит только детерминант матрицы A , мы можем преобразовывать эту матрицу. Введем

$$\beta_n = 2\kappa_n e^{2\kappa_n q_n}. \quad (10.6)$$

Тогда по (10.3):

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[\delta_{n,m} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 8\kappa_n^3 t + 2\kappa_n q_n} \right] = \\ &= \det \left[\text{diag} \left(\sqrt{\kappa_n} e^{4\kappa_n^3 t + \kappa_n q_n} \right) \right] \times \\ &\quad \times \det \left(\delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 4(\kappa_n^3 + \kappa_m^3)t + (\kappa_n + \kappa_m)q_n} \right) \times \\ &\quad \times \det \left[\text{diag} \left(\sqrt{\kappa_m^{-1}} e^{-4\kappa_m^3 t - \kappa_m q_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Первый и последний сомножители сокращают друг друга, так что

$$\det A = \det \left(\delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-\theta_n - \theta_m} \right),$$

где

$$\theta_n(t, x) = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t. \quad (10.7)$$

Более того, поскольку в (10.5) входит лишь вторая производная логарифма детерминанта матрицы A , то понятно, что преобразования матрицы, которые ведут к умножению ее на постоянную по x , или на линейную по x экспоненту не приводят к изменению потенциала. Будем обозначать преобразования матрицы A , которые сохраняют потенциал $u(x)$ знаком \cong . В частности, как легко видеть

$$A \cong \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-2\theta_n} \right\|. \quad (10.8)$$

Рассмотрим свойства введенных солитонных решений.

10.2 Односолитонное решение, $N = 1$.

В этом простейшем случае

$$\begin{aligned} \det A \equiv A &= 1 + \frac{\beta}{2\kappa} e^{-2\kappa(x-4\kappa^2 t)} = 1 + e^{-2\kappa(x-4\kappa^2 t-q)} = \\ &= 2e^{-\kappa(x-4\kappa^2 t-q)} \operatorname{ch} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q), \end{aligned}$$

где мы использовали (10.6). Поэтому

$$\gamma = \frac{\beta e^{-\kappa x + 8\kappa^3 t}}{A} = \kappa e^{\kappa x} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q))$$

$$\begin{aligned} \varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} \left(1 + \frac{i\kappa}{k - i\kappa} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)) \right) = \\ &= \frac{e^{-ikx}}{k - i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)) \end{aligned}$$

В данном случае $a(k) = \frac{k-i\kappa}{k+i\kappa}$, $a'(i\kappa) = \frac{1}{2i\kappa}$, $b(k) \equiv 0$, но $b_1 = e^{2\kappa q_n} \neq 0$, что наглядно демонстрирует, что $b_1 \neq b(i\kappa_n)$. Далее по (7.28)

$$\varphi_+(x, k) = \frac{e^{-ikx}}{k + i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)).$$

Тогда

$$u(t, x) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\chi_+(x, k) = \frac{k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}{k + i\kappa}$$

и

$$\varphi_+(x, i\kappa) = \frac{e^{4\kappa^3 t + \kappa q}}{2 \operatorname{ch} \kappa x}.$$

10.3 Двусолитонное решение, $N = 2$.

В данном случае

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2 t)} & \frac{2\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_1^3 t+2\kappa_1 q_1} \\ \frac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_2^3 t+2\kappa_2 q_2} & 1 + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2 t)} \end{vmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned} \det A = & 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2 t)} + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2 t)} + \\ & + \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2 e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2 t) - 2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2 t)}. \end{aligned}$$

Введем

$$\xi_n = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t + \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad (10.9)$$

где по определению $\varphi > 0$. Тогда

$$\det A = \frac{2e^{-\xi_1-\xi_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} \left[(\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2) \right]$$

и решение может быть записано в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & -2\partial_x^2 \ln ((\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\xi_1 - \xi_2)) = \\ = & -2\partial_x^2 \ln (\kappa_1 \operatorname{ch} \xi_1 \operatorname{ch} \xi_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2) = \\ = & -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\kappa_1^2 \operatorname{ch}^2 \xi_2 + \kappa_2^2 \operatorname{sh}^2 \xi_1}{(\kappa_1 \operatorname{ch} \xi_1 \operatorname{ch} \xi_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \xi_1 \operatorname{sh} \xi_2)^2}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Рассмотрим асимптотики этого решения на временной бесконечности. Для этого перепишем (10.10) в виде

$$u(t, x) = -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\frac{\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \xi_1} + \frac{\kappa_2^2 \operatorname{th}^2 \xi_1}{\operatorname{ch}^2 \xi_2}}{(\kappa_1 - \kappa_2 \operatorname{th} \xi_1 \operatorname{th} \xi_2)^2}.$$

Очевидно, что $u(t, x) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow \infty$ так, что обе величины ξ_1 и $\xi_2 \rightarrow \infty$. Рассмотрим поэтому случай, когда $t \rightarrow \infty$ так что либо ξ_1 , либо ξ_2 конечны. По определению

$$\xi_2 = 4\kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)t + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\xi_1 + \kappa_2(q_1 - q_2) + \frac{\varphi}{2\kappa_1}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Итак,

если ξ_1 конечна, то $\xi_2 \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$;

если ξ_2 конечна, то $\xi_1 \rightarrow \mp\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

таким образом, если ξ_1 конечна при $t \rightarrow \pm\infty$, то

$$u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\left(\frac{\kappa_1 \operatorname{ch} \xi_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \mp \frac{\kappa_2 \operatorname{sh} \xi_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \right)^2}.$$

По (10.9)

$$\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2},$$

и окончательно

$$\text{если } \xi_1 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_1 \mp \frac{\varphi}{2})}.$$

Аналогично получаем, что

$$\text{если } \xi_2 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_2 \pm \frac{\varphi}{2})}.$$

Суммируя, мы видим, что независимо от способа стремления

$$\text{при } t \rightarrow -\infty : \quad u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_1 + \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_2 - \frac{\varphi}{2})},$$

$$\text{при } t \rightarrow +\infty : \quad u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_1 - \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\xi_2 + \frac{\varphi}{2})}.$$

Действительно, если x и t стремятся к бесконечности так, что одна из ξ_n ограничена, то слагаемое в правой части, зависящее от другой ξ стремится к нулю, что дает полученный выше результат. Если же обе ξ_n стремятся к бесконечности, то мы имеем ноль слева и ноль справа. Полученная асимптотика очевидностью демонстрирует, что солитоны сохраняют при взаимодействии свою форму и приобретают сдвиги фаз – изменения знака φ . Точно также ведут себя солитонные решения и в общем, N -солитонном случае.

11 Лекция.

11.1 Асимптотика по t N -солитонных решений

В дальнейшем нам потребуется детерминант

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \det \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l. \quad (11.1)$$

Покажем, что для него имеется явная формула:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{2\kappa_i} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \frac{|\kappa_i - \kappa_j|}{\kappa_i + \kappa_j}. \quad (11.2)$$

Доказательство проводится по индукции. Очевидно, что при $l = 1$ (11.1) дает $D(\kappa_1) = (2\kappa_1)^{-1}$, что совпадает с (11.2). Далее, для детерминанта (11.1) выполняется рекуррентная формула

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1})}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2. \quad (11.3)$$

Чтобы доказать ее заметим, что

$$\begin{aligned} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| \frac{\kappa_m + \kappa_l}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l = \\ &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| 1 + \frac{\kappa_l - \kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l, \end{aligned}$$

т.е. в последнем столбце ($n = l$) стоят только единицы. Вычитая последний столбец из всех предыдущих и вынося множители $\kappa_l - \kappa_n$ из всех столбцов с $n \leq l-1$, получаем

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем теперь последнюю строку из всех предыдущих:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{\kappa_l - \kappa_m}{(\kappa_m + \kappa_n)(\kappa_l + \kappa_n)} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вынося теперь $\kappa_l - \kappa_m$ изо всех строк и $(\kappa_l + \kappa_n)^{-1}$ изо всех столбцов мы получаем (11.3), что по индукции доказывает (11.2).

Теперь мы готовы исследовать асимптотику правой части (10.8), где θ_n определены в (10.7). Когда обе переменные x и t стремятся к бесконечности в общем направлении, то и все θ_n стремятся к $+\infty$ или $-\infty$. Переупорядочим нумерацию так, чтобы в заданном направлении

$$\begin{aligned} \theta_n &\rightarrow +\infty, & n &= 1, \dots, l \\ \theta_n &\rightarrow -\infty, & n &= l+1, \dots, N, \end{aligned}$$

при этом мы полагаем, что если все $\theta_n \rightarrow -\infty$, то $l = 0$, а если все $\theta_n \rightarrow +\infty$, то $l = N$. Тогда, пользуясь свободой переопределения матрицы A , указанной при выводе равенства (10.8), имеем:

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \begin{cases} n \leq l \\ \frac{2\kappa_n e^{2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \end{cases} \right\|,$$

Левая часть матрицы стремится к единичной матрице, а правая часть стремится к матрице типа введенной в (11.1), поэтому все это выражение стремится к $D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)$. По (11.2) эта величина отлична от нуля, поэтому по (10.5) и $u(t, x) \rightarrow 0$ в общем направлении. Рассмотрим теперь случай, когда x и t стремятся к нулю так, что некоторое θ_l фиксировано. Это означает, что

$$x = c + 4\kappa_l^2 t,$$

где c – некоторая константа.

$$\theta_n|_{x=c+4\kappa_l^2 t} = \kappa_n(c - q_n) + 4\kappa_n(\kappa_l^2 - \kappa_n^2)t$$

и мы рассматриваем предел $t \rightarrow \pm\infty$. При этом далее мы, как обычно, будем полагать, что нумерация выбрана так, что $\kappa_1 > \dots > \kappa_N$. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_n|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} -\infty, & n < l \\ +\infty & n > l \end{cases}, \quad t \rightarrow +\infty, \\ \theta_n|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} +\infty, & n < l \\ -\infty & n > l \end{cases}, \quad t \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

Запишем теперь интересующий нас детерминант в виде

$$\det A \cong \det \left\| \frac{\delta_{m,n} e^{2\theta_n}}{2\kappa_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \begin{cases} n \leq l \\ \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \end{cases} \right\|.$$

Пусть $t \rightarrow +\infty$. В пределе в столбцах с $(l+1)$ -го по N -ый стоит единичная матрица. Разлагая детерминант последовательно по всем этим столбцам, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \begin{vmatrix} \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} & \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 + e^{-2\theta_l} \end{vmatrix} = \\ &= D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1}) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) \cong \\ &\cong 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, независимо от способа стремления на бесконечность, мы имеем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \det A \cong \prod_{l=1}^N \left[1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right],$$

причем легко показать, что поправочные члены убывают экспоненциально.

Рассмотрим аналогично предел $t \rightarrow -\infty$ при условии, что $\theta_l = \text{const}$. Тогда

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \begin{vmatrix} \delta_{m,n} e^{2\theta_n} & \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \\ \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} & \delta_{m,n} e^{2\theta_n} \end{vmatrix} \right\|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \begin{vmatrix} 1 + \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} & \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} \\ \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_l + \kappa_n} & \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \end{vmatrix} \cong \\ &\cong D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_l, \dots, \kappa_N). \end{aligned}$$

По аналогии с (11.3) можно показать, что

$$D(\kappa_l, \dots, \kappa_N) = \frac{D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)}{2\kappa_l} \prod_{j=l+1}^N \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2, \quad (11.4)$$

так что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \det A(t, x) \cong \prod_{l=1}^N \left[1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=l+1}^N \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right].$$

Итак, по (10.5) мы окончательно получаем, что

$$u(t, x) = - \sum_{l=1}^N \frac{2\kappa_l^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_l - \varphi_l^\pm)}, \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad (11.5)$$

где

$$\varphi_l^+ = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0, \quad \varphi_l^- = \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0.$$

Полученный результат доказывает два замечательных свойства солитонных решений. Во-первых, каждое такое решение на обоих асимптотиках стремится к сумме односолитонных решений. Во-вторых, рассеяние солитонов упруго: оно сводится лишь к изменению фаз солитонов, причем

$$\varphi_l^+ - \varphi_l^- = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} - \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j}.$$

В частности,

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \sum_{j=2}^N \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_j}{\kappa_1 - \kappa_j},$$

и

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = \sum_{j=3}^N \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_j} - \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}.$$

На самом деле, легко показать, что оба указанных свойства, равно как и формулы для фаз имеют место и для общих решений, т.е. решений с ненулевым коэффициентом отражения. Иными словами, непрерывный спектр не дает вклада в рассеяние солитонов.

12 Лекция.

12.1 Скобки Гарднера и Магри

Замечательным свойством интегрируемых уравнений является наличие бесконечной иерархии не только интегралов движения, но и пуассоновых скобок. Мы приведем здесь только первый и второй члены этой иерархии, скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри. Первая из них задается равенством

$$\{F(u), G(u)\}_0 = \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} - \frac{\delta G}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta F}{\delta u(x)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} \frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \frac{\delta G}{\delta u(+)} \right), \quad (12.1)$$

где использовано обозначение

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)}. \quad (12.2)$$

Рассмотрим для простоты скобки на таких функционалах, что для по крайней мере одной из вариаций $\frac{\delta F}{\delta u(\pm)}$ или $\frac{\delta G}{\delta u(\pm)} = 0$. Тогда (12.1) заметно упрощается:

$$\{F(u), G(u)\}_0 = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)}, \quad (12.3)$$

причем именно в таком виде она и была получена первоначально. Отсюда, в частности,

$$\{u(x), u(y)\}_0 = \delta'(x - y) \quad (12.4)$$

В силу (9.25) и (9.17)

$$H = -I_1 = \int dx \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) \quad (12.5)$$

так что

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = 3u^2 - u_{xx} \quad (12.6)$$

Динамика КдФ задается посредством

$$u_t = \{u, H\}_0 = \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} = \partial_x (3u^2 - u_{xx}) \quad (12.7)$$

так что по (9.23)

$$\{u(x), Q\}_0 = 0. \quad (12.8)$$

Однако, по (12.1) для произвольного функционала $F(u)$ имеем:

$$\{F(u), Q\}_0 = \frac{\delta F}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(+)}, \quad (12.9)$$

т.е. возникает поразительная ситуация, аналога которой для систем конечного числа свободы нет: скобка Пуассона Q с $u(x)$ равна нулю, а с некоторыми функционалами от $u(x)$ нулю не равна. Тем не менее Q часто называют аннулятором скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева. Далее, легко видеть, что

$$\{u, P\}_0 = u_x, \quad (12.10)$$

т.е. P – генератор пространственных трансляций, а H в силу (12.7) – гамильтониан уравнения КдФ, дающий его динамику: $u_t = \partial_x(3u^2 - u_{xx})$.

Следующая в иерархии скобка, скобка Магри, задается посредством

$$\{F, G\}_1 = \int dx \int dy \frac{\delta F}{\delta u(x)} \left(-\frac{\delta'''(x-y)}{4} + \frac{u(x) + u(y)}{2} \delta'(x-y) \right) \frac{\delta G}{\delta u(y)}, \quad (12.11)$$

откуда

$$\{u(x), u(y)\}_1 = -\frac{\delta'''(x-y)}{4} + \frac{u(x) + u(y)}{2} \delta'(x-y). \quad (12.12)$$

Для этой скобки все интегралы сдвигаются:

$$2\{u(x), Q\}_1 = u_x(x), \quad 4\{u(x), P\}_1 = \partial_x(3u^2 - u_{xx}) = u_t, \quad (12.13)$$

так что гамильтонианом, порождающим КдФ, теперь будет бывший импульс. Заметим, что в отличие от H функционал P положительно определен. По отношению к обоим скобкам старшие интегралы порождают старшие уравнения иерархии КдФ, причем эволюции по отношению к старшим временам являются симметриями уравнения КдФ, или любого из старших уравнений.

13 Лекция (А.В.Ильина)

13.1 Псевдодифференциальные операторы

Оператор $\partial := \frac{\partial}{\partial x}$ коммутирует с оператором умножения на функцию следующим образом

$$\partial f = f' + f\partial. \quad (13.1)$$

Определим оператор, обратный оператору ∂ , равенством $\partial^{-1}\partial = \text{Id}$. Умножим обе части равенства (13.1) на ∂^{-1} слева и справа получим равенство $\partial^{-1}f = f\partial^{-1} - \partial^{-1}f'\partial^{-1}$, которое говорит нам, как проносить оператор ∂^{-1} . Многократное применение дает

$$\partial^{-1}f = f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} + \dots \quad (13.2)$$

Упражнение 13.1 Показать, что

- $\partial^n f = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \partial^{n-k}, \quad n \geq 0;$
- $\partial^{-n} f = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} f^{(k)} \partial^{-n-k}, \quad n > 0;$

Псевдодифференциальный оператор – оператор вида

$$P = \sum_{i=-\infty}^N v_i \partial^i, \quad (13.3)$$

где $v_k(x)$ – функции. Такие операторы образуют алгебру \mathcal{P} псевдодифференциальных операторов. Введем обозначения “дифференциальной”

$$P_+ = \sum_{i=0}^N a_i(x, t) \partial^i$$

и “интегральной”

$$P_- = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_i(x, t) \partial^i.$$

частей псевдодифференциального оператора.

Вычетом псевдодифференциального оператора назовем коэффициент при ∂^{-1} , т.е. для (13.3)

$$\text{res } P = a_{-1}(x, t).$$

Лемма 13.1 Для любых двух псевдодифференциальных операторов P_1 и P_2

$$\text{res}([P_1, P_2]) = \partial P_3,$$

где P_3 – дифференциальный полином от коэффициентов P_1 и P_2 . Другими словами, вычет коммутатора двух псевдодифференциальных операторов есть полная производная.

Упражнение 13.2 Доказать Лемму (13.1).

С помощью псевдодифференциальных операторов можно извлечь квадратный корень из оператора. К примеру, для $L = \partial^2 + u$ имеем:

$$(\partial^2 + u)^{\frac{1}{2}} = \partial + \frac{u}{2}\partial^{-1} - \frac{u_x}{4}\partial^{-2} + \frac{u_{xx} - u^2}{8}\partial^{-3} + \dots$$

Оператором **Вольтерра** мы будем называть оператор вида $K = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \partial^{-i}$.

Упражнение 13.3 Показать, что существует оператор Вольтерра K , т.ч.

$$K\partial^2 K^{-1} = \partial^2 + u = L. \quad (13.4)$$

и он единственен с точностью до умножения на оператор с постоянными коэффициентами. Коэффициенты K – дифференциальные полиномы от u .

Мы можем определить и дробные степени оператора L , а именно

$$L^{\frac{r}{2}} := K\partial^r K^{-1}.$$

Найдем явный вид оператора P для представление Лакса

$$L_t = [P, L]. \quad (13.5)$$

Дифференцируя (13.4), получаем

$$L_t = \left[\frac{\partial K}{\partial t} K^{-1}, L \right]. \quad (13.6)$$

Далее, вычитаем (13.4) из (13.5)

$$\left[\frac{\partial K}{\partial t} K^{-1} - P, L \right] = 0,$$

умножая на K^{-1} последнее равенство слева и на K справа, имеем

$$\left[K^{-1} \frac{\partial K}{\partial t} - K^{-1} PK, \partial^2 \right] = 0. \quad (13.7)$$

Из (13.7) заключаем, что $K^{-1} \frac{\partial K}{\partial t} - K^{-1} PK$ должен быть дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами

$$K^{-1} \frac{\partial K}{\partial t} - K^{-1} PK = \sum_{r=0}^N c_r \partial^r. \quad (13.8)$$

Сопрягая последнее равенство оператором K получаем

$$P = \frac{\partial K}{\partial t} K^{-1} - \sum_{r=0}^N c_r L^{\frac{r}{2}}.$$

Поскольку $K^{-1} \frac{\partial K}{\partial t}$ содержит исключительно отрицательные степени ∂ , окончательная формула для P принимает вид

$$P = - \sum_{r=0}^N c_r (L^{\frac{r}{2}})_+. \quad (13.9)$$

Замечание 13.1 В последнем равенстве имеет смысл только нечетные значения r , поскольку при $r = 2m$ получаются тривидальные уравнения $[L, L^m] = 0$. Если определить $\partial^* = -\partial$, можно проверить, что K унитарен, а $L^{\frac{r}{2}}$ антисимметричен для нечетных r . Возьмем $r = 3$, тогда

$$L_+^{\frac{3}{2}} = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x, \quad (13.10)$$

и мы приходим к представлению Лакса для уравнения $K\partial\Phi$:

$$(\partial^2 + u)_t = [\partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x, \partial^2 + u], \quad (13.11)$$

а для произвольного r к представлению Лакса для уравнений $K\partial\Phi$

$$L_t = [(L^{\frac{r}{2}})_+, L]. \quad (13.12)$$

13.2 Интегралы движения и коэффициенты Гельфанд–Дикого

Лемма 13.2 Интегралами движения для уравнений $K\partial\Phi$ имеют вид

$$I_j = \int \text{res } L^{\frac{j}{2}} dx. \quad (13.13)$$

Доказательство.

$$\partial_{t_n} I_j = \int \text{res}(\partial_{t_n} L^{\frac{j}{2}}) dx = \int \text{res}([(L^{\frac{n}{2}})_+, L^{\frac{j}{2}}]) dx.$$

Из Леммы (13.1) мы знаем, что вычет коммутатора двух псевдодифференциальных операторов есть полная производная. Поэтому, в случае быстроубывающих или периодических решений последнее равенство равно нулю. ■

Коэффициентами Гельфанд–Дикого называются плотности интегралов движения

$$R_j := \text{res } L^{\frac{j}{2}}.$$

Лемма 13.3 Для коэффициентов Гельфанд–Дикого имеется рекуррентная формула

$$R_{j+2} = \frac{1}{4}(\partial^2 + 2u + 2\partial^{-1}u\partial)R_j. \quad (13.14)$$

Доказательство. Определим величины S_j и T_j равенством

$$(L^{\frac{j}{2}})_- = R_j\partial^{-1} + S_j\partial^{-2} + T_j\partial^{-3} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_{j+2} &= \text{res } L^{\frac{j}{2}+1} = \text{res}(\partial^2 + u)L^{\frac{j}{2}} = \text{res } \partial^2(R_j\partial^{-1} + S_j\partial^{-2} + T_j\partial^{-3}) + uR_j\partial^{-1} = \\ &= R_j'' + uR_j + 2S_j' + T_j. \end{aligned}$$

Заметим, что в равенстве $[L_+^{\frac{j}{2}}, L] = -[L_-^{\frac{j}{2}}, L]$ слева дифференциальный оператор, а справа неположительные степени ∂ . Следовательно $[L_-^{\frac{j}{2}}, L]$ не содержит отрицательных степеней ∂ и из равенства

$$\begin{aligned} -[L_-^{\frac{j}{2}}, L] &= -[R_j \partial^{-1} + S_j \partial^{-2} + T_j \partial^{-3} + \dots, \partial^2 + u] = \\ &= 2R'_j + (R''_j + 2S'_j) \partial^{-1} + (u'R_j + S''_j + 2T'_j) \partial^{-2} + \dots \end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned} R''_j + 2S'_j &= 0, \\ u'R_j + S''_j + 2T'_j &= 0. \end{aligned}$$

Пользуясь последними двумя формулами, имеем

$$4R'_{j+2} = R'''_j + 4uR'_j + 2u'R_j. \quad \blacksquare \quad (13.15)$$

Рекурсионный оператор для КдФ – это оператор

$$\Lambda = \partial^2 + 2u + 2\partial^{-1}u\partial.$$

С его помощью формулу (13.14) можно переписать как

$$R_{2j-1} = 2^{-2j}\Lambda^j \cdot 1. \quad (13.16)$$

Рассмотрим производящую функцию плотностей интегралов движения

$$R(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} R_n z^{-n-2}.$$

Упражнение 13.4 Показать, что $R(z)$ удовлетворяет уравнению

$$R'''(z) + 4(u - z^2)R'(z) + 2u'R(z) = 0.$$

Следующие две леммы будут необходимы для доказательства гамильтоновости уравнений иерархии КдФ.

Лемма 13.4 Для коэффициентов Гельфанд–Дикого имеется полезное соотношение

$$\frac{\delta}{\delta u} \int R_m = \frac{m}{2} R_{m-2} u \quad (13.17)$$

Доказательство.

$$\int \operatorname{res} \delta L^{\frac{m}{2}} dx = \frac{m}{2} \int \operatorname{res} L^{\frac{m-2}{2}} \delta L dx = \frac{m}{2} \int \operatorname{res} L^{\frac{m-2}{2}} \frac{\delta u(x)}{\delta u(y)} dx = \frac{m}{2} R_{m-2}. \quad \blacksquare$$

Лемма 13.5

$$L_t = [L_+^\alpha, L] = 2\partial \operatorname{res} L^\alpha. \quad (13.18)$$

Доказательство.

$$\mathcal{P}_+ \ni [L_+^\alpha, L] = [L^\alpha - L_-^\alpha, L] = -[L_-^\alpha, L] \sim -[v_1 \partial^{-1}, \partial^2] = 2\partial v_1 = 2\partial \operatorname{res} L^\alpha. \quad \blacksquare$$

Лемма 13.6 Уравнения иерархии КдФ могут быть записаны в виде

$$\partial_{t_m} u = \frac{4}{m+2} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_{m+2}}{\delta u} \quad (13.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{m+2}}{\delta u} = \frac{m+2}{2} \frac{\partial}{\partial x} R_m = \frac{m+2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \text{res } L^{\frac{m}{2}}.$$

Отсюда

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \text{res } L^{\frac{m}{2}} = \frac{4}{m+2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{m+2}}{\delta u}. \quad \blacksquare$$

Из Леммы (13.6) следует, что уравнения иерархии КдФ имеют гамильтонову формулировку

$$\partial_{t_m} u = \{u, H_m\}_1 \quad (13.20)$$

с гамильтонианом $H_m = \frac{4}{m+2} I_{m+2}$ и скобкой Пуассона вида

$$\{F, G\}_1 = \int \frac{\delta F}{\delta u} \frac{d}{dx} \frac{\delta G}{\delta u} dx. \quad (13.21)$$

Относительно скобки (13.21) интегралы движения находятся в инволюции

$$\{I_n, I_m\}_1 = \int \frac{\delta I_m}{\delta u} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_n}{\delta u} dx = \frac{mn}{4} \int R_{m-2} R'_{n-2} dx = 0, \quad (13.22)$$

поскольку коэффициенты Гельфанд–Дикого имеют свойство

$$R_j R'_l = P'_{j,l}, \quad (13.23)$$

где $P_{j,l}$ дифференциальный полином.

Упражнение 13.5 Воспользовавшись индукцией и формулой (13.15) докажите формулу (13.23).

Важнейшее свойство интегрируемых моделей состоит в том, что помимо бесконечной иерархии интегралов движения, они обладают и бесконечной иерархией пуассоновых структур. В частности, легко видеть, что

$$\partial_{t_m} u = \frac{4}{m+2} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_{m+2}}{\delta u} = 2R'_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Lambda R_{m-2} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \Lambda \frac{\delta I_m}{\delta u} = \{u, \frac{1}{m} I_m\}_2, \quad (13.24)$$

здесь мы использовали (13.17), (13.16), а

$$\{F, G\}_2 = \int \frac{\delta F}{\delta u} \frac{d}{dx} \Lambda \frac{\delta G}{\delta u} dx.$$

Там самым уравнения КдФ бигамильтоново!

Замечание 13.2 Высшие скобки Пуассона получаются последовательным применением оператора рекурсии по аналогии с вычислениями в (13.24).

14 Лекция. Коммутаторные тождества

14.1 Коммутаторные тождества

Для любых двух элементов A и B произвольной ассоциативной алгебры выполнено следующее коммутаторное тождество:

$$[A^3, [A, B]] - \frac{3}{4}[A^2, [A^2, B]] - \frac{1}{4}[A, [A, [A, [A, B]]]] = 0. \quad (14.1)$$

Для доказательства этого тождества достаточно раскрыть все скобки, пользуясь свойством ассоциативности. Заметим теперь, что коммутаторы степеней оператора A коммутируют между собою. Поэтому мы можем задать зависимость B от произвольного набора времен t_1, t_2, \dots формулами

$$B_{t_1} = [A, B], \quad B_{t_2} = [A^2, B], \quad B_{t_3} = [A^3, B], \dots, \quad (14.2)$$

что в силу (14.1) означает, что функция $B(t_1, t_2, t_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{3}{4} \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_2^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_1^4} = 0, \quad (14.3)$$

т.е. линеаризованному уравнению КПИ: уравнение (1.14) при $\sigma^2 = 1$, $t_1 = x$, $t_2 = y$ и $t_3 = -4t$.

Тождество (14.1) допускает обобщение, т.е. существует полубесконечный набор коммутаторных тождеств

$$\begin{aligned} & [A^n, \underbrace{[A, \dots, [A}_n, B] \dots] = \\ & = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(2m+1)!(n-2m-1)!} \underbrace{[A^2, \dots, [A^2}_{n-2m-1}, \underbrace{[A, \dots, [A, B] \dots]}_{4m}], \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (14.4)$$

которое также можно проверить непосредственно. Здесь $[(n-1)/2]$ означает целую часть числа. В силу (14.2) мы видим, что по переменным t_1, t_2 и t_n выполняются уравнения:

$$\frac{\partial^{n-1} B(t)}{\partial t_1^{n-2} \partial t_n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(2m+1)!(n-2m-1)!} \frac{\partial^{n+2m-1} B(t)}{\partial t_1^{4m} \partial t_2^{n-2m-1}}, \quad (14.5)$$

которые называются высшими линеаризованными уравнениями КПИ иерархии. В этом проявляется одно из специфических свойств интегрируемых уравнений: они всегда являются элементами бесконечных иерархий интегрируемых уравнений, упорядоченных по степеням старших производных. При этом следует иметь ввиду, что включение, скажем, четырех времен (например, t_1, t_2, t_3 и t_4) не означает, что мы имеем интегрируемое уравнение функции четырех переменных. На самом деле, функция $B(t)$ в этом случае удовлетворяет двум уравнениям из (14.5), каждое из которых является уравнением по трем независимым переменным: при $n = 3$ это t_1, t_2 и t_3 , а при $n = 4$ – это t_1, t_2 и t_4 .

Введя зависимость оператора B от “времен” (независимых переменных) по (14.2) мы пришли к линейным дифференциальным уравнениям, которым он удовлетворяет в силу коммутаторных тождеств. Теперь наша задача – построить соответствующие нелинейные уравнения. Однако предварительно мы рассмотрим операторную реализацию элементов A и B ассоциативной алгебры.

14.2 Операторы A и B

В силу первого равенства в (14.2) оператор B зависит от t_1 , поэтому естественно считать, что он действует в пространстве функций вещественной переменной t_1 , например $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, dt_1)$. Пусть D_1 означает оператор дифференцирования в этом пространстве: $(D_1 f)(t_1) = f_{t_1}(t_1)$. Тогда по (14.2)

$$A = D_1 + z, \quad (14.6)$$

где z – некоторый оператор, коммутирующий с произвольным оператором B . Избегая излишней общности, будем считать, что z – параметр, $z \in \mathbb{C}$. По аналогии с псевдодифференциальными операторами, положим, что мы рассматриваем операторы, заданные посредством

$$B(t_1)f(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipt_1} \tilde{B}(t_1, ip + z) \int dt'_1 e^{-ipt'_1} f(t'_1), \quad (14.7)$$

где $\tilde{B}(t_1, z)$ – функция трех вещественных аргументов: t_1 , z_{Re} и z_{Im} . Мы будем называть эту функцию символом оператора B , причем мы не предполагаем ее аналитической зависимости от переменной $z = z_{\text{Re}} + iz_{\text{Im}}$. (Вообще говоря, мы будем считать, что рассматриваются операторы с символами, являющимися обобщенными функциями умеренного роста.) Заметим, что если символ оператора задан, то сам оператор восстанавливается формальной подстановкой

$$B(t_1, A) = : \tilde{B}(t_1, z + D_1) :, \quad (14.8)$$

если она имеет смысл и где $::$ означает “нормальное” упорядочение, т.е. все операторы D_1 стоят справа. В силу (14.6) и (14.7) легко видеть, что

$$\tilde{A}(t_1, z) = z. \quad (14.9)$$

Пусть теперь имеются два оператора B и B' с символами, соответственно, $\tilde{B}(t_1, z)$ и $\tilde{B}'(t_1, z)$. Тогда для символа их композиции по (14.7) получаем

$$\widetilde{BB'}(t_1, z) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipt_1} \tilde{B}(t_1, z + ip) \int dt'_1 e^{-ipt'_1} \tilde{B}'(t'_1, z). \quad (14.10)$$

Отсюда для символа коммутатора $[A^n, B]$ следует:

$$\widetilde{[A^n, B]}(t_1, z) = ((\partial_{t_1} + z)^n - z^n) \tilde{B}(t_1, z). \quad (14.11)$$

Пусть теперь оператор $B(t)$ зависит от t_2, t_3, \dots, t_n , где n – некоторое конечное число, в силу (14.2). В силу (14.7) это означает, что от этих же времен зависит и символ этого оператора, $\tilde{B}(t, z)$, так, что выполнены уравнения

$$\tilde{B}_{t_2}(t, z) = \tilde{B}_{t_1 t_1}(t, z) + 2z \tilde{B}_{t_1}(t, z), \quad (14.12)$$

$$\tilde{B}_{t_3}(t, z) = \tilde{B}_{t_1 t_1 t_1}(t, z) + 3z \tilde{B}_{t_1 t_1}(t, z) + 3z^2 \tilde{B}_{t_1}(t, z). \quad (14.13)$$

...

$$\tilde{B}_{t_n}(t, z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n! z^{n-m}}{m!(n-m)!} \tilde{B}_{t_1}^{(m)}(t_1, z), \quad (14.14)$$

где последнее равенство следует из (14.11) (не путать ∂_{t_1} и $D_1!$).

На множестве рассматриваемых операторов можно ввести операцию $\bar{\partial}$ -дифференцирования. По заданному оператору F с символом $\tilde{F}(t_1, z)$ определим оператор $\bar{\partial}F$, задав его ядро как

$$\widetilde{\bar{\partial}F}(t_1, z) = \frac{\partial \tilde{F}(t_1, z)}{\partial \bar{z}}, \quad (14.15)$$

где для $z = z_{\text{Re}} + iz_{\text{Im}}$ мы используем обозначение

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\text{Re}}} + i \frac{\partial}{\partial z_{\text{Im}}} \right), \quad (14.16)$$

так что $\bar{\partial}z = 0$, $\bar{\partial}\bar{z} = 1$. В силу сделанных предположений $\bar{\partial}F$ существует, его действие на вектора пространства дается по (14.7) как

$$(\bar{\partial}F)f(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int dp \frac{\partial \tilde{F}(t_1, z + ip)}{\partial \bar{z}} \int dt'_1 e^{-ip(t_1 - t'_1)} f(t'_1), \quad (14.17)$$

и по (14.10) выполнено правило Лейбница для дифференцирования произведения двух операторов:

$$\bar{\partial}(FF') = (\bar{\partial}F)F' + F\bar{\partial}F'. \quad (14.18)$$

Как уже отмечалось, для дифференциальных операторов эта процедура дает ноль, в частности по (14.9)

$$\bar{\partial}A = 0. \quad (14.19)$$

Задача 13 Доказать непосредственным вычислением, что равенство (14.1) является тождеством.

Задача 14 Найти общее решение системы (14.12), (14.13).

15 Лекция.

15.1 Обратная задача (процедура одевания)

Пусть задан оператор $B(t, A)$, зависящий от времен t_1, \dots, t_n по (14.2), см. (14.12)–(14.14). Введем оператор **одевания** $K(t)$ как решение $\bar{\partial}$ -задачи (см. (14.15))

$$\bar{\partial}K(t) = K(t)B(t), \quad (15.1)$$

нормированное условием, что его символ на z -бесконечности имеет предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{K}(t, z) = 1. \quad (15.2)$$

Мы будем считать, что данная задача однозначно разрешима. При этом условии, которое требует существенных ограничений на символ оператора B , которые мы тут не рассматриваем, эта задача позволяет вывести уравнения, описывающие эволюцию оператора K . При этом для зависимости от t_1 мы имеем непосредственно по определению операторов A и B :

$$K_{t_1} + KA = AK, \quad (15.3)$$

как, впрочем и для любого оператора рассматриваемого типа. Однако уже для эволюции по t_2 ситуация более сложная. Положим, что символ оператора K обладает асимптотикой

$$\tilde{K}(t, z) = 1 + \frac{v(t)}{z} + \frac{w(t)}{z^2} + O(z^{-3}), \quad z \rightarrow \infty \quad (15.4)$$

где $v(t)$ и $w(t)$ – некоторые функции t , не зависящие от z и являющиеся, тем самым, по (14.7) символами операторов умножения, которые мы будем обозначать так же $v(t)$, $w(t)$ и т.д. Равенство (15.4) мы будем формально писать в виде

$$K(t) = 1 + v(t)A^{-1} + w(t)A^{-2} + \dots. \quad (15.5)$$

Предположим, что оператор K допускает обратный, т.е. существует оператор K^{-1} , такой, что $KK^{-1} = 1$. Тогда, в силу (14.18) и (15.1) $KBK^{-1} + K\bar{\partial}K^{-1} = 0$, т.е.

$$\bar{\partial}K^{-1} = -BK^{-1}, \quad (15.6)$$

а в силу (15.2) имеем нормировку

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \widetilde{K^{-1}}(t, z) = 1. \quad (15.7)$$

Если коэффициенты оператора K при $z \rightarrow \infty$ известны, то определяются и коэффициенты разложения оператора K^{-1} . Например, по (15.5) находим

$$K^{-1}(t, A) = 1 - v(t)A^{-1} - (w(t) - v^2(t))A^{-2} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (15.8)$$

Задача 15 Восстановить детали вывода равенства (15.8).

15.2 Старшие эволюции оператора K

Эволюции оператора B заданы по (14.2): $B_{t_n} = [A^n, B]$, а зависимость оператора $K(t)$ от старших времен определяется задачей (15.1) с нормировкой (15.2). Тогда, в силу (14.19), мы получаем, что

$$\bar{\partial}(K_{t_n} + KA^n) = (K_{t_n} + KA^n)B. \quad n \geq 2. \quad (15.9)$$

Заметим, что в силу (15.6) $B = -(\bar{\partial}K^{-1})K$, что позволяет записать предыдущее равенство в виде $\bar{\partial}((K_{t_n} + KA^n)K^{-1}) = 0$. Итак, символ произведения $(K_{t_n} + KA^n)K^{-1}$ является аналитической функцией переменной z , а значит совпадает с полиномиальной частью этого же произведения. Для произвольного оператора F введем разбиение:

$$F = F_+ + F_-, \quad (15.10)$$

$$\tilde{F}_-(t, z) = \int \frac{dw_{\text{Re}} dw_{\text{Im}}}{\pi(z-w)} \frac{\partial \tilde{F}(t, w)}{\partial w}. \quad (15.11)$$

Если последний интеграл существует и можно под знаком интеграла перейти к пределу $z \rightarrow \infty$, то символ $\tilde{F}_-(t, z)$ убывает на z -бесконечности. А в силу (15.10) и (15.11) $\bar{\partial}F_+ = 0$. При условии, что символы оператора принадлежат пространству обобщенных функций умеренного роста по переменной z , мы получаем, что $F_+(t)$ зависит от A полиномиально, т.е. является дифференциальным оператором. Далее, поскольку символ оператора $\tilde{K}_{t_n}(t, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, как следует из (15.2), то первое слагаемое, $K_{t_n}K^{-1}$, не имеет полиномиальной части в силу (15.7). Итак:

$$(K_{t_n} + KA^n)K^{-1} = (KA^nK^{-1})_+, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15.12)$$

Введем оператор

$$\Gamma = KAK^{-1}, \quad (15.13)$$

так что $\Gamma^n = KA^nK^{-1}$ и равенство (15.12) принимает вид

$$K_{t_n} + KA^n = (\Gamma^n)_+K. \quad (15.14)$$

Именно это равенство и задает динамику оператора K по старшим временам.

15.3 Система Захарова–Шабата

По определению

$$\Gamma K = KA, \quad (15.15)$$

что формально, ср. (14.8) и первое равенство в (14.10), можно записать как

$$:\Gamma(t, D_1 + z):\tilde{K}(t, z) = z\tilde{K}(t, z), \quad (15.16)$$

что означает, что $\tilde{K}(t, z)$ – собственная функция для оператора Γ .

Асимптотические свойства символа $\tilde{\Gamma}(t, z)$ по переменной z следуют, конечно, из асимптотических свойств операторов символов операторов K и K^{-1} . Поскольку $\Gamma = A - [A, K]K^{-1}$, то $\tilde{\Gamma}(t, z)$ растет линейно, причем константный

член отсутствует. Аналогичный результат следует и из (15.5), (15.8), так что мы имеем

$$\Gamma(t, A) = A + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m A^{-m}, \quad (15.17)$$

и аналогично

$$\Gamma^n(t, A) = A^n + \sum_{m=2-n}^{\infty} \gamma_{n,m} A^{-m}, \quad n \geq 2, \quad (15.18)$$

где также отсутствует член степени $n - 1$.

Временная зависимость $\Gamma^m(t, A)$ следует из (15.14):

$$\partial_{t_n} \Gamma^m = [\Gamma^m, (\Gamma^n)_-] \equiv -[\Gamma^m, (\Gamma^n)_+], \quad (15.19)$$

где мы воспользовались тем, что $[\Gamma^m, \Gamma^n] = 0$. Антисимметризуем это равенство:

$$\begin{aligned} \partial_{t_n} \Gamma^m - \partial_{t_m} \Gamma^n &= [\Gamma^m, (\Gamma^n)_-] + [\Gamma^m, (\Gamma^n)_+] = \\ &= [(\Gamma^m)_+ + (\Gamma^m)_-, (\Gamma^n)_-] + [(\Gamma^n)_+ + (\Gamma^n)_-, (\Gamma^m)_+] = \\ &= [(\Gamma^m)_-, (\Gamma^n)_-] + [(\Gamma^n)_+, (\Gamma^m)_+]. \end{aligned}$$

что дает выражение, разложенное на полиномиальную и убывающие части (см. Задачу 16). Разлагая аналогично исходное выражение, получаем:

$$\partial_{t_n} (\Gamma^m)_+ - \partial_{t_m} (\Gamma^n)_+ = [(\Gamma^n)_+, (\Gamma^m)_+], \quad (15.20)$$

$$\partial_{t_n} (\Gamma^m)_- - \partial_{t_m} (\Gamma^n)_- = [(\Gamma^m)_-, (\Gamma^n)_-], \quad (15.21)$$

Набор равенств (15.20) (или (15.21)) называется системой Захарова–Шабата. В силу (15.14) эта система гарантирует, что потоки по m -му и n -му временам коммутируют.

Задача 16 Пусть F и G – два произвольных оператора рассматриваемого класса. Доказать, что коммутатор $[F_+, G_+]$ является дифференциальным оператором, а символ коммутатора $[F_-, G_-]$ убывает с ростом z .

16 Лекция

16.1 Свойства символа оператора B

Рассмотрим решение уравнений (14.2), которые в силу (14.6) и (14.10) записываются как

$$\tilde{B}_{t_n}(t, z) = \{(\partial_{t_1} + z)^n - z^n\}B(t, z). \quad (16.1)$$

Решение этих уравнений можно представить в виде

$$\tilde{B}(t, z) = \int dp e^{ipt_1 + [(ip+z)^2 - z^2]t_2 + [(ip+z)^3 - z^3]t_3 + \dots + [(ip+z)^n - z^n]t_n} f(p, z), \quad (16.2)$$

где интегрирование идет по вещественным p от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим теперь, что коэффициент при t_2 , вообще говоря, может расходиться и в любом случае дает экспоненциальный рост по t_2 , даже если функция $f(p, z)$ локальна по p . Избавиться от этих проблем можно только при условии, что либо $p = 0$, либо $p = -2z_{\text{Im}}$. Первый выбор дает константное решение, а потому неинтересен. Поэтому мы рассмотрим только такие функции, для которых справедливо представление $f(p, z) = \delta(p + 2z_{\text{Im}})b(z)$, так что

$$\tilde{B}(t, z) = e^{-2iz_{\text{Im}}t_1 + [\bar{z}^2 - z^2]t_2 + [\bar{z}^3 - z^3]t_3 + \dots + [\bar{z}^n - z^n]t_n} b(z), \quad (16.3)$$

где $b(z)$ – некоторая функция своего аргумента. Заметим, что при этом коэффициенты при t_3 и старших временах также стали чисто мнимыми.

Теперь уравнение (15.1), записанное для символов операторов, приобретает вид

$$\frac{\partial \tilde{K}(t, z)}{\partial \bar{z}} = \tilde{K}(t, \bar{z})e^{-2iz_{\text{Im}}t_1 + [\bar{z}^2 - z^2]t_2 + [\bar{z}^3 - z^3]t_3} b(z), \quad (16.4)$$

что, собственно, и называется $\bar{\partial}$ -задачей (с сопряжением). Заметим, что это уравнение переписывается в виде

$$\frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial \bar{z}} = \varphi(t, \bar{z})b(z), \quad (16.5)$$

если ввести решение Йоста

$$\varphi(t, z) = \tilde{K}(t, z)e^{zt_1 + z^2t_2 + z^3t_3 + \dots}. \quad (16.6)$$

16.2 Уравнение КПП и формулировка в терминах решений Йоста

Рассмотрим частные случаи общего построения. При $n = 2$ уравнения (15.5), (15.8) и (15.13) дают

$$(\Gamma^2)_+ = A^2 - u, \quad (16.7)$$

где мы обозначили

$$u(t) = 2v_{t_1}(t), \quad (16.8)$$

что по (15.14) означает

$$K_{t_2} + KA^2 = A^2K - uK. \quad (16.9)$$

Для того, чтобы найти $(\Gamma^3)_+$ заметим, что в силу (16.9)

$$\begin{aligned} KA^3K^{-1} &= A^3 + K[A, K^{-1}]A^2 + KA[A^2, K^{-1}] = \\ &= A^3 + KK^{-1}_{t_1}A^2 + K(K^{-1}_{t_2} - K^{-1}u)A + \\ &\quad + K(K^{-1}_{t_2} - K^{-1}u)_{t_1}, \end{aligned}$$

где использовано (16.9). По (15.5), (15.8), (15.13) и (16.8), , находим

$$(\Gamma^3)_+ = A^3 - \frac{3}{2}uA - \frac{3}{4}u_{t_1} - \frac{3}{4}\int^{t_1} u_{t_2}, \quad (16.10)$$

где $\int^{t_1} u_{t_2}$ означает первообразную $u_{t_2}(t)$ по переменной t_1 . Теперь (15.20) для $m = 2$ и $n = 3$ дает

$$(-4u_{t_3} - 6uu_{t_1} + u_{t_1 t_1 t_1})_{t_1} = -3u_{t_2 t_2}, \quad (16.11)$$

что есть уравнение КПИ, (1.16), при $x = t_1$, $y = t_2$ и $t = -4t_3$.

Уравнение (16.9) по (16.6) сводится

$$\varphi_{t_2} - \varphi_{t_1 t_1} + u(t)\varphi = 0, \quad (16.12)$$

т.е. к уравнению теплопроводности, ср. (1.17).

Далее, в силу (16.6) равенство (15.14) примает вид

$$\varphi_{t_n}(t, z) = \mathcal{A}_n(t, \partial_{t_1})\varphi(t, z), \quad (16.13)$$

где мы ввели дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}_n(t, \partial_{t_1}) =: (\tilde{\Gamma}^n)_+(t, \partial_{t_1}):, \quad (16.14)$$

который ввиду (15.18) можно записать в виде формального ряда

$$\mathcal{A}_n(t, \partial_{t_1}) = \partial_{t_1}^n + \sum_{m=2-n}^0 \gamma_{n,m}(t)\partial_{t_1}^{-m}. \quad n \geq 2, \quad (16.15)$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\partial_{t_2} + \mathcal{A}_2, \quad (16.16)$$

так что по (16.7)

$$\mathcal{A}_2(t, \partial_{t_1}) = \partial_{t_1}^2 - u(t), \quad (16.17)$$

что легко следует и из (16.14). Мы получили лаксов оператор, данный в (1.17), т.е. оператор теплопроводности. А (16.13) при $n = 2$ есть (16.12):

$$\mathcal{L}\varphi = 0, \quad (16.18)$$

так что $\varphi(t, z)$ – собственная функция оператора \mathcal{L} (при нулевой энергии). Далее, по (15.20) мы получаем систему Захарова–Шабата:

$$\mathcal{A}_{m,t_n} - \mathcal{A}_{n,t_m} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_m]. \quad (16.19)$$

В частности, при $m = 2$

$$-\mathcal{A}_{n,t_2} + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_n] = \mathcal{A}_{2,t_n}$$

что в силу (16.16) дает иерархию КПИ

$$\mathcal{L}_{t_n} = [\mathcal{L}, \mathcal{A}_n]. \quad (16.20)$$

Иерархия интегрируемых уравнений – это (бесконечный) набор интегрируемых уравнений с одним и тем же оператором Лакса.

16.3 Редукция к уравнению КдФ

Как следует из (14.2), (15.1) и (15.6), поскольку $\Gamma^n = KA^nK^{-1}$, то

$$\bar{\partial}\Gamma^n = -K[A^n, B]K^{-1}. \quad (16.21)$$

Если $K_{t_2} = 0$, то по предыдущему равенству $\bar{\partial}\Gamma^2 = 0$, т.е. Γ^2 – дифференциальный оператор.

Представление (16.3) допускает редукцию к случаю, когда символ оператора B , а тогда и сам оператор, не зависит от переменной t_2 . Это означает, что $b(p, z_{\text{Im}}) \sim \delta(p + 2z_{\text{Im}})$:

$$\tilde{B}(t, z) = \delta(z_{\text{Re}})e^{-2iz_{\text{Im}}t_1+2iz_{\text{Im}}^3t_3+\dots}r(z_{\text{Im}}), \quad (16.22)$$

причем легко видеть, что вместе с t_2 выпала зависимость и от всех четных времен. Таким образом, в иерархии КдФ уравнений “в два раза меньше”, чем в иерархии КП.

Ввиду независимости $B(t)$ от t_2 , от него не зависит также и оператор одевания $K(t)$, так что (16.9) сводится к

$$(A^2 - u)K = KA^2, \quad (16.23)$$

и

$$\Gamma^2 = A^2 - u, \quad (16.24)$$

т.е. квадрат псевдодифференциального оператора оказывается чисто дифференциальным оператором. Это условие является определяющим КдФ, поскольку эквивалентно условию независимости от t_2 . Переходя к решениям Йоста, отметим, что опять же ввиду независимости от t_2 , эти решения нужно определять как

$$\varphi(t, z) = \tilde{K}(t, z)e^{zt_1+z^3t_3+z^5t_5+\dots}, \quad (16.25)$$

в отличии от (16.6). Тогда (16.23) сводится к спектральной задаче для стационарного уравнения Шредингера,

$$-\varphi_{t_1 t_1}(t, z) + u(t) \varphi(t, z) = -z^2 \varphi(t, z), \quad (16.26)$$

где $-z^2$ играет роль спектрального параметра, $z = ik$ в обозначениях Лекции 3. Поскольку $z_{\text{Re}} = -k_{\text{Im}}$, то равенство (16.22) в силу (16.4) означает, что решения Йоста для оператора Штурма–Лиувилля аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях переменной k , как мы видели раньше. Второй оператор лаксовой пары, (1.13), получается по (16.13), (16.14), причем теперь в $(\Gamma^3)_+$ отсутствует интегральный член, см. (16.10).

17 Вопросы к зачету

1. Общая схема метода обратной задачи. Уравнение Кортевега–де Фриза
2. Решения Йоста для уравнения Кортевега–де Фриза
3. Дискретный спектр
4. Обратная задача: задача Римана–Гильберта
5. Временнаá эволюция данных рассеяния.
6. Интегралы движения.
7. Скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри.
8. Одно- и двусолитонные решения.