

Материалы к семинарам по матанализу (второй семестр)

17-я и 18-я недели (14.05–25.05.2018)

Лекции

1. Многомерный интеграл Римана
2. Сведение кратного интеграла к повторному
3. Замена переменных в многомерном интеграле

Примерные задачи семинаров 25–27

Задача 8.1. Вычислить интегралы: а) $\iint_{[0,1] \times [0,1]} (x+y) dx dy$, б) $\iint_{x,y \geq 0, x+y \leq 1} (x+y) dx dy$.

Задача 8.2. Пусть $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Найдите $\iint_{[a,a'] \times [b,b']} F''_{xy}(x,y) dx dy$.

Задача 8.3. Вычислите площадь: а) круга радиуса R , б) эллипса с полуосями a и b , в) области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

Задача 8.4. Вычислите интеграл от функции $f(x,y) = |xy|$ по единичному кругу.

Задача 8.5. Сведите двойной интеграл неизвестной непрерывной функции f к однократному:

а) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x^2+y^2) dx dy$, б) $\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x^2+y^2) dx dy$, в) $\iint_{x^2+y^2 \leq x} f(y/x) dx dy$.

Задача 8.6. Вычислить площадь, ограниченную кривыми (кривой): а) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ ($a > 0$), б) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, в) $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$ ($0 < p < q$, $0 < r < s$).

Указание. б) Можно использовать обобщённую полярную замену $x = ar \cos^\gamma \varphi$, $y = br \sin^\gamma \varphi$.

в) Придумайте замену, после которой область интегрирования станет прямоугольником.

Задача 8.7. Найдите площадь фигуры, высекаемой на плоскости $2x + 2y + z = 1$ поверхностью

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Указание. Как связаны площадь плоской области и её ортогональной проекции на другую плоскость?

Задача 8.8. Найдите координаты центра масс полукруга $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$. Напомним, что координаты x_0, y_0 центра масс — это средние значения по области от функций x и y соответственно.

Задача 8.9. Для сферической системы координат $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$ найдите якобиан замены евклидовых координат на сферические.

Задача 8.10. Найдите объём а) шара радиуса R , б) тора, полученного вращением вокруг оси ℓ окружности радиуса a , которая лежит в плоскости, содержащей ℓ , причём центр окружности удалён от оси на расстояние b .

Задача 8.11. Найдите среднее значение функции $f = x^2 + y^2 + z^2$ в области $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$.

Задача 8.12. а) Найдите объём подмножества \mathbb{R}^n , заданного неравенствами $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, $x_1 + \dots + x_n = 1$.

б) Найдите объём n -мерного правильного симплекса с ребром, равным 1.

Задача 8.13. Найдите объём тела, высекаемого в октанте $x, y, z \geq 0$ поверхностью $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$.