

Лекции 22-18. Многомерный интеграл Римана и критерий Лебега

1 Определение интеграла.

Всюду в этой лекции $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. В этой и следующих лекциях рассматриваются только ограниченные функции.

Определения.

а. Промежуток $I : x_j \in [a_j, b_j]$, $b_j \geq a_j$

$|I| = \prod (b_j - a_j)$ $j = 1, \dots, n$.

б. Разбиение P : прямое произведение разбиений отрезков $[a_j, b_j]$.

$P = \{I_1, \dots, I_N\}$; $\text{diam } P = \max \text{diam}_{k=1, \dots, N} I_k$.

в. Набор $\alpha : \alpha_k \in P_k$.

г. Интегральная сумма:

дано $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C})

$$\Sigma(f, P, \alpha) = \sum_{k=1}^N f(\alpha_k) |I_k|$$

Определение 1 *Интеграл:*

$$\int_I f(x) dx = \lim_{\text{diam } P \rightarrow 0} \Sigma(f, P, \alpha), \quad (1)$$

при условии, что предел существует.

2 Основные теоремы.

Теорема 1 Для любой функции $f \in C(I)$ интеграл (1) существует.

Эта теорема доказывается так же, как в одномерном случае. Мы докажем существенно более общую теорему.

Теорема 2 (Критерий Лебега) $f \in \mathcal{R}(I)$, другими словами, интеграл (1) от функции $f \exists \Leftrightarrow$ множество точек разрыва функции f имеет меру 0.

3 Множества меры нуль.

Определение 2 Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет n -мерную меру 0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетное покрытие множества E промежутками $I_k : \sum |I_k| < \varepsilon$.
Обозначение: $\mu_n(E) = 0$.

Упражнения 1 1. Счетное объединение множеств n -мерной меры 0 имеет n -мерную меру 0.

2. $A \subset E, \mu_n(E) = 0 \Rightarrow \mu_n(A) = 0$.

3. В определении 2 можно брать как открытые, так и замкнутые промежутки.

4 Верхние и нижние интегральные суммы

Определение 3

$$\Sigma^{\pm}(f, P) = \sum_1^N \min_{\max I_k} f |I_k|.$$

Свойства интегральных сумм (доказываются, как в одномерном случае):

Свойства 1 1)

$$\Sigma^-(f, P) \leq \Sigma(f, P, \alpha) \leq \Sigma^+(f, P)$$

2)

$$\forall P, Q, \Sigma^-(f, P) \leq \Sigma^+(f, Q)$$

3)

$$|\Sigma(f, P, \alpha)| < \max |f| \cdot \sum_1^N |I_k|, P = \{I_k\}.$$

5 Компакты меры 0

Предложение 1 Любой компакт меры 0 покрывается конечным числом промежутков, сумма мер которых произвольно мала.

Предложение 2 (Роса на камнях.) Пусть $K \subset I$ - компакт меры 0. Тогда для каждого ε существует такое δ_0 , что если $\delta < \delta_0$, и $P = (I_1, \dots, I_N)$ - произвольное разбиение I диаметром $\leq \delta$, то

$$\sum_{\substack{I_j \in P \\ I_j \cap K \neq \emptyset}} |I_j| < \varepsilon.$$

Доказательство Возьмем конечное покрытие U компакта K промежутками K_j : $\sum |K_j| < \varepsilon$. Пусть $\delta_0 = \min_{j=1, \dots, M} \text{diam } K_j$. Пусть $\delta < \delta_0$. Тогда суммарный объем всех промежутков, задевающих K_j , не превосходит $3^n |K_j|$.

$$\sum_{\substack{I_j \in P \\ I_j \cap (\cup K_i) \neq \emptyset}} |I_j| < 3^n \varepsilon.$$

□

6 Осцилляция и точки разрыва.

Определение 4 *Осцилляция функции f в точке x_0 - это $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) - \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \text{osc}_{x_0} f$.*

Функция f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \text{osc}_{x_0} f = 0$.

Лемма 1 *Для любого $a \geq 0$ и $\forall f$ множество точек $O_a = \{x | \text{osc}_x f \geq a\}$ замкнуто.*