Критерий Лебега и его следствия

Достаточность условия Лебега доказана; докажем необходимость.

1 Необходимость условия Лебега

Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Пусть K_ε - множество тех точек, в которых колебание функции f не меньше ε. Из определений осцилляции и непрерывности следует, что множество D точек разрыва функции f имеет вид: $D = \cup K_{\varepsilon_n}$. Предположим, что D не имеет меру ноль. Тогда существует такое n, что множество K_{ε_n} не имеет меру ноль; фиксируем это n. Следовательно, существует такое α , что любое покрытие множества K_{ε_n} промежутками имеет меру больше α. Докажем, что для любого разбиения промежутка I разность между соответствующей верхней и нижней интегральными суммами больше некоторой константы. Отсюда будет следовать, что интеграла Римана от функции f не существует.

Пусть P - произвольное разбиение промежутка I, P' - объединение тех промежутков разбиения, пересечение которых с множеством K_{ε_n} не пусто. Разобьем P' на два подмножества, P_1 и P_2: промежутки первого подмножества имеют общие внутренние точки с множеством K_{ε_n}, промежутки второго не имеют. Множество K_{ε_n} тоже разбивается на два: K_1 и K_2; K_j- пересечение K_{ε_n} с объединением промежутков множества P_j. Объединение всех граней промежутков разбиния P имеет меру 0. Поэтому $m(K_2) = 0,\ m(K_1) > 0$. Следовательно, для некоторого $\alpha > 0, |P_1| > \alpha$.

Колебание функции f на каждом из промежутков множества P_1 не меньше, чем ε_n. Следовательно,

$$\Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) \geq \Sigma^+(f, P_1) - \Sigma^-(f, P_1) \geq \varepsilon_n \cdot \alpha.$$

Поскольку разбиение P произвольно, отсюда следует, что интеграла Римана от функции f не существует.

2 Критерий Дарбу

Теорема 1 *Функция $f : I \to R$ интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ $L = U$, где L и U определены выше.*

Замечание 1 *В полной формулировке, теорема Дарбу утверждает еще, что*

$$L = \lim_{diam P \to 0} \Sigma^-(f, P),\ U = \lim_{diam P \to 0} \Sigma^+(f, P).$$

Мы этого не доказываем и не будем использовать.

Доказательство Критерий Дарбу мгновенно следует из условия Лебега.

Необходимость. Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$. Тогда для f выполнено условие критерия Лебега. Тогда $L = U$, как доказано выше.

Достаточность. Пусть $L = U$. Докажем, что тогда выполнено условие критерия Лебега. Предположим противное. Тогда, как доказано выше, существует такое $c > 0$, что

$$\Sigma^{+}(f, P) - \Sigma^{-}(f, P) \geq c.$$

Отсюда следует, что $U - L \geq c$ - противоречие. □

3 Интеграл Римана как линейный функционал

Теорема 2 *Интеграл Римана по промежутку - линейный непрерывный функционал на пространстве всех функций, непрерывных на этом промежутке с нормой “максимум модуля”.*

4 Интеграл по множеству

Пусть X - подмножество промежутка I, f - функция на X. Интеграл от этой функции по X - это, по определению

$$\int_X f(x)dx = \int_I f(x)\chi(x)dx,$$

где χ -характеристическая функция (индикатор) множества X.

Теорема 3 *Непрерывная функция на компактном подмножестве $\mathbb{R}^n$ интегрируема тогда и только тогда, когда граница этого множества имеет меру 0.*

Примеры.