Лекция 23-18. Критерий Лебега

1 Схема доказательства достаточности

Чтобы доказать существование интеграла от некоторой функции, мы хотим доказать, что для достаточно мелкого разбиения, верхние и нижние интегральные суммы близки, другими словами, что их разность мала. На первый взгляд, хочется оценить вклад в эту разность того подмножества области определения, где функция непрерывна, и того, где она разрывна. В точности этот подход не работает. Но работает близкая идея: оценить вклад того множества, на котором осцилляция функции меньше ε, и того, на котором она больше ε. Первое множество мы несколько уменьшаем, второе увеличиваем. Начнем с первого.

2 Лемма о малой осцилляции

Лемма 1 *Пусть I - промежуток, $M \subset I$ - замкнутое множество. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Тогда для любого ε существует δ такое, что если колебание функции f на M не больше ε, то для любого разбиения диаметра не больше δ*

$$\Sigma^+(f, P'') - \Sigma^-(f, P'') \leq 2\varepsilon|I|, \tag{1}$$

где

$$\Sigma^{\mp}(f, P'') = \sum_{I_k \in P''} {}^{\min}_{\max_{I_k}} f|I_k|,$$

и P''- множество всех промежутков разбиения P, принадлежащих M.

Доказательство Для каждой точки x возьмем окрестность V_x, в которой $\mathrm{osc}_{V_x} f \leq 2\varepsilon$; V_x - шар с центром x и радиусом r_x. Пусть W_x - шар с центром x и радиусом $\frac{r_x}{2}$. Выберем из покрытия $\{W_x\}$ конечное подпокрытие. Пусть δ - минимальный радиус шара этого подпокрытия.

Пусть P -разбиение I диаметра не больше δ. Тогда каждый промежуток $I_k \in P''$ пересекает один из шаров W_x. Его диаметр меньше радиуса этого шара. Поэтому $I_k \in V_x$. Следовательно, $\mathrm{osc}_{I_k} f \leq 2\varepsilon$. Следовательно,

$$\Sigma^+(f, P'') - \Sigma^-(f, P'') = \Sigma_{I_k \in P''}(\mathrm{osc}_{I_k} f)|I_k| \leq 2\varepsilon|I|.$$

$\square$

3 Достаточность условия Лебега.

Основная лемма 1 *В условиях критерия Лебега,* $\forall\varepsilon\exists\delta$: *diam* $P<\delta\Rightarrow\Sigma^+(f,P)-\Sigma^-(f,P)<\varepsilon$.

Доказательство Возьмем ε и будем искать δ. Рассмотрим множество K_ε тех точек, в которых колебание функции f не меньше ε. Покроем K_ε конечным числом открытых промежутков общей меры $<\varepsilon$ (здесь ε играет двоякую роль!) Пусть δ_1 - минимальный диаметр этих промежутков, G - их объединение.

В точках множества $M=I\setminus G$ функция f имеет колебание меньше ε. Рассмотрим соответствующее $\delta=\delta_2$ из леммы о малой осцилляции.

Возьмем $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Рассмотрим произвольное разбиение P диаметра меньше δ. Положим:

$$P=P'\sqcup P'',P'=\{I'_k\},P''=\{I''_l\},\ I'_k\cap G\neq\emptyset,\ I''_l\cap G=\emptyset.$$

Пусть $|P'|=\Sigma_{I'_k\in P'}|I'_k|$. По предложению “роса на камне”,

$$|P'|\leq 3^n\varepsilon.$$

Следовательно, для любого набора α, совместимого с P,

$$\Sigma_{I'_k\in P'}f(\alpha_k)|I'_k|\leq 3^n\varepsilon C,\ C=\sup_I|f|.$$

По лемме о малой осцилляции,

$$\Sigma^+(f,P'')-\Sigma^-(f,P'')\leq 2\varepsilon|I|.$$

Значит,

$$\Sigma^+(f,P)-\Sigma^-(f,P)\leq\Sigma^+(f,P'')-\Sigma^-(f,P'')+|\Sigma^+(f,P'|+|\Sigma^-(f,P'|\leq\varepsilon(3^n+2|I|).$$

□

4 Окончание доказательства достаточности условия Лебега

Доказательство [достаточности] Пусть $L=\sup_P\Sigma^-(f,P),\ U=\inf_P\Sigma^+(f,P)$. По свойству 2 интегральных сумм, $L\leq U$. Из леммы 2 следует, что $L=U:=\mathcal{I}$. Докажем, что $\mathcal{I}$ равно интегралу (**??**) . Возьмем произвольное ε , соответствующее ему δ, как в лемме 2, и рассмотрим произвольное разбиение P диаметра меньше δ и интегральную сумму $\Sigma=\Sigma(f,P,\alpha)$. Имеем:

$$\Sigma^+(f,P) \geq \mathcal{I} \geq \Sigma^-(f,P),$$

$$\Sigma^+(f,P) \geq \Sigma \geq \Sigma^-(f,P),$$

$$\Sigma^+(f,P) - \Sigma^-(f,P) < \varepsilon.$$

Следовательно, $|\mathcal{I} - \Sigma| < \varepsilon$. $\square$