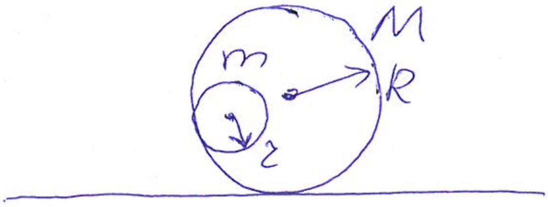
Механика

Домашнее задание 2

срок сдачи **05.06.2018**

Для приведенных ниже систем (см. рисунки 1 и 2) составьте лагранжиан, отделите движение центра масс и приведите выражения для всех имеющихся интегралов движения (законы сохранения).



1. (Рис. 1) Однородная тонкостенная цилиндрическая труба массы M и радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Внутри этой трубы находится еще одна однородная тонкостенная цилиндрическая труба массы m и радиуса $r < R$. Труба m может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности трубы M.

2. (Рис. 2) Частица массы m скользит по поверхности однополостного гиперболоида

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Вторая частица m движется вдоль оси $O\vec{z}$ и связана с частицей на гиперболоиде пружиной, потенциальная энегрия деформации которой задается формулой

$$U(l) = \frac{kl^2}{2},$$

где l — длина пружины.

3. Функционал $S[y(x)]$ определен на множестве $\mathbb{R}^{\infty}[0, 1]$ гладких (бесконечно дифференцируемых) на отрезке $[0, 1]$ функций $y(x)$ формулой:

$$S[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2) dx.$$

Найдите фунцию, на которой функционал S принимает экстремальное значение, если $y(x)$ принадлежат следующим подмножествам $\mathbb{R}^{\infty}[0, 1]$:

а) Функции с фиксированными граничными значениями вида:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -\text{sh}(1).$$

б) Функции с фиксированными граничными значениями вида:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

но без ограничений на производные $y'(0)$ и $y'(1)$.

4. Свободная точечная частица массы m движется по поверхности сферы.

а) Напишите лагранжиан этой динамической системы.

б) Выпишите выражения для сохраняющихся величин (интегралов движения)

в) Пользуясь интегралами движения, составьте дифференциальное уравнение геодезических на сфере и решите его, выбрав подходящую систему сферических координат.

5. Движение массивного точечного заряда e в поле электрического диполя в пространстве $\mathbb{R}^3$ определяется следующим лагранжианом:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{e(\vec{d}\cdot\vec{r})}{r^3},$$

где $\vec{d}$ — фиксированный вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$ (дипольный момент).

а) Данная система обладает симметрией вращения вокруг оси, задаваемой вектором $\vec{d}$. Найдите соответствующий нетеровский интеграл движения.

б) Докажите, что однопараметрическое семейство преобразований с вещественным параметром α

$$\vec{r} \mapsto \alpha\,\vec{r}, \quad t \mapsto \alpha^2 t$$

является симметрией рассматриваемой системы и найдите соответствующий нетеровский интеграл движения.

в) Какие еще интегралы движения существуют у этой системы?

6. Материальная точка массы m движется по прямой $O\vec{x}$ в однородном силовом поле:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx.$$

С помощью теоремы Нетер определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии $t \mapsto t$, $x \mapsto x + \epsilon$.