Группы и алгебры Ли II. Задачи к домашнему экзамену

Задача 1. Докажите, что старшие веса внешних степеней векторного представления $\mathfrak{sl}_n$ являются фундаментальными весами.

Задача 2. Докажите соотношения Серра для всех простых классических алгебр Ли.

Задача 3. Пусть w - элемент длины l группы Вейля системы корней R и $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_l}$ - его приведенное разложение. Пусть

$$R_w = \{\gamma \in R_+ :\ w^{-1}(\gamma) \in R_-\}.$$

Тогда

а) $l(w) = |R_w|$

б) $R_w = \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}(\alpha_{i_2}), s_{i_1}s_{i_2}(\alpha_{i_3}), \ \ldots, \ s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})\}$.

Задача 4. Действуя на эрмитовы матрицы, установите изоморфизм собственной группы Лоренца $SO_0(1,3)$ и группы $SL(2,\mathbb{C})/\pm 1$.

Задача 5. Вещественная группа $G = SU^*(2n)$ (другое обозначение $SL(n,\mathbb{H})$) определяется как подгруппа группы $SL(2n,\mathbb{C})$, состоящая из ее элементов, коммутирующих с преобразованием J, где

$$J(z_1, ...z_n, z_{n+1}, ..., z_{2n}) = (\bar{z}_{n+1}, ..., \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, ..., -\bar{z}_n).$$

Покажите, что группа и ее алгебра Ли описываются блочными матрицами $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ с условиями на детерминант и след соответственно. Опишите комплексификацию алгебры Ли, вещественную инволюцию, максимальную компактную подгруппу K и разложение Картана. Покажите, что G - вещественная форма (AII) группы $SL(2n,\mathbb{C})$. Каков ранг симметрического пространства G/K?

Задача 6. Пусть ω - невырожденная кососимметрическая билинейная форма в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Лагранжево подпространство - это подпространства размерности n, на котором $\omega = 0$. Покажите, что грассманиан лагранжевых подпространств - однородное риманово многообразие. Опишите группу изометрий и стабилизатор точки. Покажите, что оно симметрическое. Компактно оно или нет? Каков его ранг?