

Теории и модели (семинар 5а)

1. Даны две теории T, S в сигнатуре L , такие что теория $T \cup S$ противоречива. Докажите, что найдется замкнутая формула φ , такая что $T \vdash \varphi$ и $S \vdash \neg \varphi$.
2. Докажите, что следующие теории не являются счетно категоричными:
 - a) $\text{Th}(\mathbb{N}, <, 0, 1, =)$
 - b) $\text{Th}(\mathbb{Z}, <, =)$
 - c) $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, 0, =)$
3. Рассмотрим нестандартную модель M арифметики Пеано PA .
Определим на ней отношение порядка
 $a \leq b := \exists x (a + x = b)$.
и отношение эквивалентности
 $a \approx b :=$
существует натуральное n (т. е. сумма единиц), такое что $(a = b + n$ или $b = a + n)$.
Классы эквивалентности по $\approx$ называются *галактиками*.
Докажите следующие свойства M :
 - a) Существует наименьшая галактика.
 - б) Не существует наибольшей галактики.
 - в) Между любыми 2 различными галактиками имеются другие галактики.
 - г) Относительно порядка $\leq$, всякая галактика, кроме наименьшей, изоморфна множеству $\mathbb{Z}$ с обычным порядком.
4. Сколько попарно не эквивалентных полных расширений имеет теория плотных линейных порядков в сигнатуре $(<, =)$?
5. Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична в мощности континуум.
6. В сигнатуре $(R, =)$, где R — 2-местный предикатный символ, рассмотрим теорию отношений эквивалентности с бесконечным количеством классов, каждый из которых бесконечен.
 - a) Запишите аксиомы этой теории.
 - б) Докажите, что эта теория не является конечно аксиоматизируемой.
 - в) Докажите полноту этой теории.