

Логика и алгоритмы весна 2018.
Задачи для семинара N 5. Игры Эренфойхта.

В задачах 1-10 рассматриваются линейные порядки в сигнатуре $\{<, =\}$.

1. Пусть $L_n = (\{1, 2, \dots, n\}, <, =)$. Докажите, что L_n и L_{n+1} не n -эквивалентны при $n = 2, 3, 4$.
2. Пусть $M, ' — линейные порядки в сигнатуре $(<, =)$, $n > 0$. Тогда $x \uparrow$ обозначает интервал, состоящий из всех $y > x$; $x \downarrow$ обозначает интервал, состоящий из всех $y < x$. Докажите, что $M \equiv_n M'$, если и только если выполнены (1) и (2):
(1) для любого m из M найдется m' из M' , так что $m \uparrow \equiv_{n-1} m' \uparrow$ и $m \downarrow \equiv_{n-1} m' \downarrow$.
(2) для любого m' из M' найдется m из M , так что $m \uparrow \equiv_{n-1} m' \uparrow$ и $m \downarrow \equiv_{n-1} m' \downarrow$.$
3. При каких m Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $EF_m(L_6, L_7)$?
4. При каком наименьшем n Новатор выиграет игру $EF_n(\mathbb{N}, \mathbb{N} + \mathbb{N})$?
5. Докажите, что $L_m \equiv_k L_n$ при $m, n > 3^k$.
6. Докажите, что не существует формулы α в сигнатуре $\{<, =\}$ такой, что $L_n \models \alpha$, если и только если n четно.
7. Докажите, что $L_n \equiv_k \mathbb{N} + \mathbb{Z} + (-\mathbb{N})$ (где $(-\mathbb{N})$ — множество отрицательных целых чисел) при достаточно большом n (и фиксированном k).
8. Докажите, что $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} + \mathbb{Z}$.
9. Докажите, что $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.
10. Докажите, что множество четных чисел не определимо в $(\mathbb{N}, <, =)$. (Указание: рассмотрите соответствующую формулу в $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$).
11. Докажите, что абелевы группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_k$ для различных k попарно не элементарно эквивалентны, но любая замкнутая формула, истинная в $\mathbb{Z}$, истинна в $\mathbb{Z}_k$ для достаточно большого k .