# Листок 1.9

## Многомерное интегрирование

срок сдачи 8 июня

**Задача 1.** Приведите пример ограниченной функции $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, для которой двойной интеграл $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy$ не существует, а повторный интеграл $\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)dx$ существует.

**Задача 2.** Приведите пример ограниченной функции $f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, для которой двойной интеграл $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy$ не существует, а оба повторных интеграла $\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)dx$ и $\int_0^1\Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\Big)dy$ существуют.

**Задача 3.** Пусть область $\Omega$ на плоскости $Oxy$ имеет площадь $S$ и координаты $(x_0,y_0)$ центра масс. Вращая область $\Omega$ вокруг оси $Oy$, получим тело $T$. Докажите, что объём тела $T$ равен $2\pi x_0 S$.

**Задача 4.** Тело двигается вдоль оси $Oz$, направленной вертикально вниз, погружаясь в озеро, уровень поверхности которого — плоскость $z=0$. Пусть $z$ — координата фиксированной точки $P$ тела. Действующая на тело *сила Архимеда* равна $\rho g V(z)$, где $\rho g$ — константа (произведение плотности воды на ускорение свободного падения), а $V(z)$ — объём части тела, находящейся ниже уровня воды. Работа против силы Архимеда при погружении тела от положения $z=a$ до положения $z=b$ тогда равна $A=\int_a^b \rho g V(z)\,dz$.
Найдите работу против силы Архимеда при погружении прямого кругового конуса с радиусом основания $r$ и высотой $h$, если его погружают а) вершиной вниз, б) вершиной вверх, в) с горизонтально расположенной осью симметрии. В начальном положении конус находится вне воды, в конечном — целиком в воде, касаясь её поверхности.

**Задача 5.** Вычислите объём $n$-мерного шара $\{(x_1,\dots,x_n) : x_1^2+\dots+x_n^2\le R^2\}$.

**Задача 6.** а) Рассмотрим произвольную последовательность ограниченных областей $\Omega_n\subset\mathbb{R}^2$, для которых определён интеграл Римана, такую что $\Omega_n$ содержит круг радиуса $R_n$ с центром в нуле и $R_n\to\infty$. Докажите, что последовательность $I_n=\iint_{\Omega_n} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy$ имеет предел, причём он не зависит от выбора последовательности $(\Omega_n)$.
б) Вычислите $\lim_{n\to\infty} I_n$, взяв $\Omega_n = B_{R_n}(0)$.
в) Докажите, что существует $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz$, и найдите его, взяв $\Omega_n=[-R_n,R_n]\times[-R_n,R_n]$.