Семинар 19.
Модели Пуанкаре плоскости Лобачевского L^2

В задачах 1-5 работаем в модели $\mathbb{H}_2$ плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости.

Задача 1. Найдите середину отрезка $[1, 1 + i]$.

Задача 2. Напишите уравнение геометрического места точек, отстоящих от прямой $x = 0$ на расстояние $\ln 3$.

Задача 3. Объясните, почему в этой модели неевклидовы (то есть гиперболические) окружности являются евклидовыми окружностями, лежащими в верхней полуплоскости.

Задача 4. Найдите неевклидовы центр и радиус окружности $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$.

Задача 5. Найдите расстояние между орициклами $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ и $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Дополнительные задачи к семинару 19

Задача 1. Чем с евклидовой точки зрения является в модели $\mathbb{H}_2$:

- а) движение, сохраняющее множество вертикальных прямых;
- б) отражение относительно прямой, изображаемой в этой модели окружностью;
- в) отражение относительно прямой, изображаемой в этой модели вертикальной прямой;
- г) композиция двух отражений относительно прямых, изображаемых в этой модели концентрическими окружностями.

Задача 2. В модели Кэли-Клейна выразите угол $\widehat{ASB}$ через двойное отношение $(XX'YY')$, где $\{X, X'\} = \overline{SA} \cap \omega$, $\{Y, Y'\} = \overline{SB} \cap \omega$, а точки A и B лежат внутри отрезков SX и SY соответственно.

Задача 3. Докажите, что всякое нетождественное движение плоскости L^2 является одним из следующих движений:

- а) поворотом;
- б) движением вдоль орициклов;
- б) сдвигом вдоль эквидистант (аналог параллельного переноса);
- г) композицией симметрии относительно прямой и сдвига вдоль эквидистант этой же прямой (аналог скользящей симметрии).