# Лекция 25-18. Квадрируемость по Жордану

## 1 Мера Жордана

**Определение 1** *Пусть $I$ - промежуток, $P$ - его разбиение. Описанное около $X$ подразбиение разбиения $P$ состоит из всех промежутков разбиения $P$, которые имеют с $X$ непустое пересечение, вписанное в $X$ - из всех промежутков разбиения $P$, принадлежащих $X$.*

**Определение 2** *Подмножество $X$ промежутка $I$ квадрируемо по Жордану, если разность мер описанного около $X$ и вписанного в $X$ подразбиений стремится к $0$, когда диаметр разбиения промежутка $I$ стремится к $0$. Мера Жордана $X$ - это инфимум мер описанных и супремум мер вписанных подразбиений.*

**Определение 3** *Мера подмножества $X \subset I$ - это интеграл*

$$\int_X 1dx = \int_I \chi_X(x)dx \tag{1}$$

**Теорема 1** *Определения 1 и 2 меры $X$ эквивалентны: интеграл (1) существует если и только если множество $X$ квадрируемо по Жордану, и равен мере $X$ в смысле определения 1.*

**Доказательство** Объем описанного около $X$ (вписанного в $X$) подразбиения - это верхняя (нижняя) сумма интеграла из правой части равенства (1). □

## 2 Квадрируемость по Жордану и критерий Лебега

**Теорема 2** *Ограниченное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ квадрируемо тогда и только тогда, когда его граница имеет меру 0.*

**Доказательство** Множество точек разрыва характеристической функции ограниченного подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ совпадает с границей этого подмножества. Теорема следует теперь из критерия Лебега. □

## 3 График непрерывной функции.

**Теорема 3** *График непрерывной функции $I \to \mathbb{R}$, где $I$ - промежуток в $\mathbb{R}^n$, имеет $(n+1)$-мерную меру $0$.*

**Доказательство** Подграфик непрерывной функции $I \to \mathbb{R}$, где $I$ - промежуток в $\mathbb{R}^n$, квадрируем по Жордану. □

# 4 Мера $0$ и диффеоморфизмы.

**Теорема 4** *Множество меры* $0$ *при диффеоморфизме переходит в множество меры* $0$.

# 5 Выпуклые множества.

**Теорема 5** *Выпуклые множества с непустой внутренностью квадрируемы по Жордану.*

**Доказательство** Возьмем внутреннюю точку 0 выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и представим $\mathbb{R}^n \setminus 0$ в виде прямого произведения $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ (введем полярные коэффициенты в $\mathbb{R}^n$). В этих координатах граница $\partial X$ - график непрерывной функции $S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ (следует из определения выпуклости). С помощью теорем 4 и 3 доказывается, что $\partial X$ имеет меру 0. $\square$