Лекция 26-18. Теорема Фубини

1 Теорема Фубини для непрерывных функций

Теорема 1 *Кратный интеграл непрерывной функции по промежутку равен повторному.*

Теорема Фубини возникла в теории интеграла Лебега. Отсюда ее название перекочевало в теорию интеграла Римана, хотя для нпрерывных йункций она была известна и раньше.

Расшифровка 1 *Пусть* $I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^n$, I_x*- промежуток в* $\mathbb{R}^m$, I_y*- промежуток в* $\mathbb{R}^l$, $m + l = n$. *Пусть*

$$F(x) = \int_{\{x\}\times I_y} f(x,y)dy. \tag{1}$$

Тогда

$$\int_{I_x} F(x)dx = \int_I f(x,y)dxdy. \tag{2}$$

Правая часть называется кратным интегралом *(раньше был термин просто "интеграл"). Левая часть называется* повторным интегралом *по понятной причине.*

Промежуток I_y назовем вертикальным, промежуток I_x - горизонтальным.

Доказательство Эвристическое. Интеграл - это сумма. Даже обозначение интеграла, введеное Лейбницем, напоминает букву S. Теорема говорит, что интегральную сумму по всему промежутку I можно считать так: сначала просуммировать все слагаемые по столбцам (по вертикальным промежуткам) - получится примерно член интегральной суммы для F- а потом результаты сложить - получится интегральная сумма для f. Переход к пределу при стремлении диаметра разбиения к нулю доказывает теорему.

Формальное доказательство. Функция F, определенная формулой (1), непрерывна. Это следует из равномерной непрерывности f на I. Поэтому левая часть формулы (2) существует.

Пусть $P_x = \{I_1, ..., I_N\}$ и $P_y = \{J_1, ..., J_M\}$ - произвольные разбиения промежутков I_x и I_y, $P = P_x \times P_y$.

Лемма 1 (основная лемма)

$$\Sigma^-(f,P) \le \Sigma^-(F,P_x),\ \Sigma^+(F,P_x) \le \Sigma^+(f,P).$$

Мы докажем только первое неравенство; второе доказывается аналогично. Из этих неравенств и леммы о двух полицейских (бывших милиционерах) следует теорема.

Пусть $a_k = (\min_{I_k} F)|I_k|$ - один член суммы $\Sigma^-(F, P_x)$. На время фиксируем k. Пусть $\min_{I_k} F = F(x_k),\ x_k \in I_k$. Имеем:

$$F(x_k) \geq \Sigma^-(f|_{\{x_k\}\times I_y}, P_y) = \sum_{l=1}^{M}(\min_{\{x_k\}\times J_l} f)\cdot |J_l| \geq \sum_{l=1}^{M}(\min_{I_k\times J_l} f)\cdot |J_l|.$$

Следовательно:

$$a_k \geq \sum_{l=1}^{M}(\min_{I_k\times J_l} f)|I_k||J_l|.$$

Но выражение справа и есть часть нижней интегральной суммы $\Sigma^-(f, P)$, соответствующая "одному столбцу" $I_k \times I_y$. Тогда

$$\Sigma^-(F, P_x) = \sum_{1}^{N} a_k \geq \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}(\min_{I_k\times J_l} f)|I_k||J_l| = \Sigma^-(f, P).$$

Основная лемма, а с ней и теорема Фубини для непрерывных функций, доказана. □

Практически все многомерные интегралы считаются с помощью теоремы Фубини.

2 Еще о теореме Фубини.

Теорема Фубини справедлива не только для непрерывных функций, но и для всех, интегрируемых по Риману. Если доказывать эту теорему "от нуля" - возникнут технические сложности. Но у нас уже доказан критерий Лебега. Он "вбирает технические сложности в себя," и доказательство получается практически таким же, как для случая непрерывных функций. Разница с непрерывным случаем состоит в том, что интеграл по "вертикальному промежутку" может быть не всюду определен. Чтобы преодолеть эту неприятность, введем следующее определение.

Пусть функция g определена на промежутке. Обозначим через $S(g)$ супремум нижних интегральных сумм для g, а через $U(g)$ - инфимум верхних. Положим:

$$F_s(x) = \begin{cases} \int_{\{x\}\times I_y} f(x,y)dy & \text{если интеграл существует} \\ S(f|_{\{x\}\times I_y}) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично определяется F_u. Отметим, что $F_s \leq F_u$.

Теорема 2 *Кратный интеграл интегрируемой по Риману функции по промежутку равен повторному.*

Расшифровка 2 *Пусть I, I_x, I_y, F_s, F_u - те же, что и выше.*

$$\int_{I_x} F_s(x)dx = \int_{I_x} F_u(x)dx = \int_I f(x,y)dxdy. \tag{3}$$

Более того, $F_s = F_u$ почти всюду на I_x. Это значит, что интеграл $\int_{\{x\}\times I_y} f(x,y)dy$ существует для почти всех $x \in I_x$.

Доказательство

Пусть $P_x = \{I_1, ..., I_N\}$ и $P_y = \{J_1, ..., J_M\}$ - произвольные разбиения I_x и I_y, $P = P_x \times P_y$.

Лемма 2 (основная лемма)

$$\Sigma^-(f,P) \leq \Sigma^-(F_s,P_x),\ \Sigma^+(F_u,P_x) \leq \Sigma^+(f,P).$$

Доказательство основной леммы - дословно такое же, как в непрерывном случае, только при доказательстве левого неравенства F нужно заменить на F_s, а правого - на F_u.

Поскольку функция f интегрируема, к ней применим критерий Дарбу. Следовательно, $S(f) = U(f)$. Из основной леммы следует теперь, что $S(f) \leq S(F_s), U(F_u) \leq U(f)$. Поскольку $U(F_s) \leq U(F_u)$, получаем: $S(F_s) = U(F_s) = U(F_u)$. По критерию Дарбу функция F_s интегрируема по Риману, и ее интеграл равен повторному. Аналогично доказывается, что функция F_u интегрируема. Равенство (3) доказано.

Докажем, что интеграл $\int_{\{x\}\times I_y} f(x,y)dy$ существует для почти всех $x \in I_x$. Действительно, интегралы функций F_s и F_u совпадают. Но $F_s \leq F_u$. Следовательно, $F_s - F_u$ - неотрицательная функция с нулевым интегралом. Достаточно доказать, что $F_s - F_u = 0$ почти всюду. Действительно, нижний предел функции $F_s - F_u$ в каждой точке равен нулю. Иначе у этой функции существовала бы положительная интегральная сумма (докажите!). Следовательно, любая точка, где $F_s - F_u \neq 0$ является точкой разрыва. Но функция $F_s - F_u$ интегрируема. По критерию Лебега, множество ее точек разрыва имеет меру 0. Значит, она отлична от нуля на множестве меры 0. Отсюда следует, что интеграл

$$\int_{\{x\}\times I_y} f(x,y)dy$$

существует для почти всех x. Это заканчивает доказательство теоремы Фубини в общем случае.

$\square$