

Семинар 20.
Сферическая геометрия. Круговые преобразования

Задача 1. При каких n существует выпуклый прямоугольный сферический n -угольник?

Задача 2. Докажите, что для сферического треугольника с длинами сторон a , b , c имеет место неравенство $a + b + c < 2\pi$.

Задача 3. Докажите, что три медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 4. Найдите длину стороны правильного сферического треугольника, вписанного в сферическую окружность радиуса r .

Задача 5. *Круговой плоскостью* называется евклидова плоскость E^2 с одной добавленной "бесконечно удаленной" точкой ∞ , в которой пересекаются все прямые. *Круговым преобразованием*, или *преобразованием Мёбиуса* круговой плоскости называется композиция любого числа инверсий (в том числе симметрий относительно прямых).

Докажите, что:

- (1) всякое подобие является круговым преобразованием;
- (2) всякое круговое преобразование, сохраняющее точку ∞ , является преобразованием подобия;
- (3) всякое круговое преобразование, не сохраняющее точку ∞ , единственным образом представляется в виде композиции инверсии и подобия.

Дополнительные задачи к семинару 20

Задача 1. Гиперболический четырехугольник назовем идеальным, если его вершины лежат на абсолюте. Докажите, что в идеальном выпуклом четырехугольнике диагонали и общие перпендикуляры противоположащих сторон пересекаются в одной точке.

Задача 2. Дана точка в модели Кэли-Клейна. Как с помощью циркуля и линейки построить отвечающую ей точку в модели Пуанкаре в круге?

Задача 3. * Докажите, что преобразование $\varphi : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, сохраняющее ориентацию и отображающее прямые в прямые и окружности в окружности, имеет вид $\varphi(z) = \alpha z + \beta$, где $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$.