Программа коллоквиума по курсу «Логика и алгоритмы»

Логика высказываний

1. Пропозициональные формулы. Лемма об однозначном анализе (без док.). Оценки и их продолжения на формулы. Равносильные формулы. Тавтологии.
2. Исчисление высказываний (CL). Выводы (формальные доказательства) и теоремы CL.
3. Вывод формулы A→A. Вывод из гипотез.
4. Свойства отношения выводимости. Допустимые и производные правила. Примеры допустимых правил.
5. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.
6. Теорема корректности для CL.
7. Независимость схемы (A10) ¬ A→ (A→B) от остальных аксиом CL.
8. Непротиворечивые множества формул. Свойства максимальных непротиворечивых подмножеств.
9. Выполнимость непротиворечивых множеств. Теорема о семантической полноте CL.

Исчисление предикатов.

10. Сигнатура. Термы, атомарные формулы, формулы. Лемма об однозначном анализе (без док.). Свободные и связанные вхождения переменных. Параметры формулы. Замкнутые термы и формулы.
11. Модель данной сигнатуры. Расширенная сигнатура модели. Оцененные термы и формулы. Значение оцененного терма. Значение оценненной формулы. Выполнимость и общезначимость для замкнутых формул.
12. Свободная подстановка терма вместо переменной в формулу.
13. Исчисление предикатов без равенства (PC). Вывод из гипотез. Свойства отношения выводимости. Допустимые и производные правила.
14. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
15. Непротиворечивость PC.
16. Лемма о выводимости примеров тавтологиий в PC.
17. Примеры теорем и производных правил в PC: правила Бернайса, монотонность для кванторов, переименование связанной переменной, взаимодействие кванторов с отрицанием.
18. Теории первого порядка и их модели. Логическое (семантическое) следование. Элементарная теория модели (Th(M)). Элементарная эквивалентность моделей. Полные теории. Критерий полноты теории: элементарная эквивалентность всех ее моделей.
19. Гомоморфизм и изоморфизм моделей. Преобразование значений термов при гомоморфизме. Сохранение значений формул при сюръективном гомоморфизме.
20. Изоморфность моделей. Изоморфные модели элементарно эквивалентны.
21. Исчисление предикатов с равенством. Нормальные модели. Нормализация модели аксиом равенства.
22. Сильная категоричность (для теорий с равенством). Полнота сильно категоричных теорий. Теорема: если M — конечная модель конечной сигнатуры, то Th(M) конечно сильно категорична. Следствие: совпадение элементарной эквивалентности и изоморфности для конечных моделей конечной сигнатуры.
23. Универсальное замыкание. Общезначимые формулы. Общезначимость примеров тавтологий.

24. Теорема корректности исчисления предикатов без равенства: формулировка и план доказательства.
25. Общезначимость двух предикатных аксиом (Бернайса). Сохранение общезначимости при применении MP и Gen.
26. «Технические леммы» о подстановке термов в термы и формулы. Общезначимость аксиом $\forall x\, \alpha \to [t/x]\, \alpha$, $[t/x]\, \alpha \to \exists x\, \alpha$.
27. Корректность исчисления предикатов с равенством относительно нормальных моделей. Теорема корректности для теорий (без равенства и с равенством).
28. Непротиворечивые теории. Свойства: в противоречивой теории доказуемы все формулы; если $T \cup \{\alpha\}$ противоречива, то $T \vdash \neg \alpha$. Непротиворечивость выполнимой теории.

Введение в теорию моделей.

29. Пример: арифметика Пеано (PA). Стандартная модель PA.
30. Свидетели; теории Хенкина. Лемма о свежей константе. Лемма Хенкина.
31. Свойства максимальных непротиворечивых теорий. Лемма Линденбаума.
32. Модель максимальной непротиворечивой теории Хенкина, построенная из замкнутых термов. Мощность этой модели.
33. Теорема о существовании модели для непротиворечивой теории (без равенства и с равенством). Теорема Гёделя о полноте.
34. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности для теорий первого порядка.
35. Теорема о повышении мощности до бесконечной.
36. Теорема Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности.
37. Существование нестандартных моделей арифметики.
38. Теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности до любой бесконечной.
39. Полные теории. k-категоричность. Признак полноты Лося — Вота.
40. Теорема Морли о категоричности (формулировка). Теория бесконечных множеств в сигнатуре {=} k-категорична для всех бесконечных k.
41. Теория TFD делимых абелевых групп без кручения. Построение векторного пространства над **Q** для модели TFD.
42. Теорема Хамеля о базисе. Мощность векторного пространства над **Q** бесконечной размерности k. Изоморфность пространств одинаковой размерности.
43. Категоричность теории TFD в любой несчетной мощности.
44. Простые формулы в сигнатуре без функциональных символов. Приведение каждой формулы к простому виду.
45. Кванторный ранг. Формульная n-эквивалентность кортежей индивидов в моделях.
46. Игры Эренфойхта. Определения: ходы, партии, позиции, условие выигрыша. Стратегия и выигрышная стратегия Консерватора. Игровая n-эквивалентность.
47. Индуктивное описание игровой эквивалентности. Конечность числа классов игровой n-эквивалентности.
48. Теорема Эренфойхта — Фраиссе о совпадении игровой и формульной n-эквивалентности. Следствие: признак элементарной эквивалентности моделей.
49. Пример: в сигнатуре {=} все достаточно большие модели n-эквивалентны. Следствие:

в этой сигнатуре нет формулы, выделяющей конечные множества четной мощности из всех конечных.

50. Свойство конечной модели для формул без равенства с одноместными предикатами.
51. Бесконечные игры Эренфойхта. Игровая ω-эквивалентность. Изоморфность ω-эквивалентных счетных моделей.
52. Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков $\aleph_0$-категорична (теорема Кантора).

Литература.

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления. http://www.mccme.ru
2. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.
2. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.
3. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.
4. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.
5. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
6. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.
7. D. Marker. Model theory. An introduction. Springer, 2002.
8. L. Libkin. Elements of finite model theory. Springer, 2012.